

# Não-localidade de Bell em sistemas tripartidos

**Palavras-chave:** emaranhamento, não-localidade e otimização.

**Mateus Aparecido Rodrigues | Prof. Dr. Rafael Luiz da Silva Rabelo\***

Departamento de Física da Matéria Condensada | Instituto de Física “Gleb Wataghin”

## Introdução

A teoria quântica é uma das mais bem-sucedidas teorias físicas já desenvolvidas, haja vista sua comprovação experimental e aplicação em diversas áreas da ciência e tecnologia. Apesar de bem-sucedida, a teoria quântica ainda não pode ser considerada uma teoria completa, pois alguns dos fenômenos que são resultados desta teoria permanecem em aberto ainda nos dias de hoje.

No que tange os fundamentos da teoria quântica, um dos fenômenos mais contra-intuitivos e enigmáticos é a *não-localidade*. A não-localidade diz respeito a fortes correlações entre partes, espacialmente separadas, de sistemas compostos, que não podem ser modeladas por nenhuma teoria local ou teoria de variáveis ocultas locais. A não-localidade é evidenciada por meio de violações de desigualdades de Bell, consequentemente, essas são as ferramentas mais importantes no estudo de não-localidade.

Com o surgimento da teoria quântica da informação (informação quântica), as desigualdades de Bell se tornaram importantes ferramentas para a implementação de diversos protocolos como os de comunicação quântica [1], de distribuição quântica de chaves criptográficas [2] e de avaliação de emaranhamento multipartido [3].

Embora as desigualdades de Bell sejam fundamentais para o estudo de não-localidade e tenham aplicabilidade em diversas áreas da informação quântica, atualmente, violar desigualdades de Bell de sistemas multipartidos por meio de métodos numéricos tradicionais é inexecutável devido ao custo computacional exponencial de processamento e de armazenamento de dados [4].

Neste projeto, foram implementados os métodos numéricos de Aproximação Estocástica de Perturbação Simultânea (aeps)

[4] e see-saw [5, 6], ambos em Python, e posteriormente aplicados ao estudo de não-localidade em sistemas quânticos de três qubits, sorteados aleatoriamente a partir de funções também implementadas ao longo do projeto, com o intuito de demonstrar, numericamente, a localidade ou a não-localidade de determinadas famílias de estados quânticos.

## Estados quânticos e emaranhamento

A todo sistema quântico estão associados um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}^d$  e um operador densidade e esse por sua vez descreve o estado do sistema. Operadores densidade são combinações convexas de projetores unidimensionais  $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , que têm a seguinte forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i \quad (1)$$

onde  $\sum_i p_i = 1$ ,  $p_i \geq 0$  e  $|\psi_i\rangle = 1$  para todo  $i$ . Estados quânticos podem ser divididos entre estados puros e mistos. Se o estado de um sistema for descrito por um único projetor, o estado é dito puro. Se o estado do sistema for descrito por combinações de dois ou mais projetores, o estado é dito misto.

Sistemas quânticos compostos são também descritos por operadores densidade, se o estado do sistema não puder ser descrito em termos de combinações convexas de produtos tensoriais dos operadores densidade de cada uma das partes que compõem o sistema, então o estado é dito emaranhado, caso contrário o estado é dito separável.

Tanto os estados emaranhados puros quanto estados emaranhados mistos podem ser sorteados aleatoriamente. Estados emaranhados puros podem gerados aleatoriamente segundo a distribuição de Haar. Já os mistos podem ser sorteados a partir da distribuição de Ginibre [7].

## Desigualdades de Bell e não-localidade

As desigualdades de Bell são construídas a partir das probabilidades conjuntas de se obter resultados condicionados às medições em dado experimento. Para sistemas que admitem modelagens locais ou de variáveis ocultas locais, as desigualdades de Bell são sempre satisfeitas e esses sistemas são ditos locais. Caso o sistema não admita tais modelagens, a desigualdade de Bell desse sistema é violada o que implica que as correlações entre as partes do sistema são não-locais e portanto o sistema apresenta não-localidade. Apenas estados quânticos emaranhados são capazes de violar desigualdades de Bell.

Em cenários tripartidos, onde cada uma das partes pode realizar duas medições dicotômicas, pode-se rotular os observáveis associados às medições de Alice, Bob e Charlie - observadores em suas respectivas partes - por  $A_x$ ,  $B_y$  e  $C_z$  com  $x, y, z \in \{0, 1\}$  com autovalores  $a, b, c \in \{\pm 1\}$ . Então, o valor médio do observável  $A_x \otimes B_y \otimes C_z$  para um determinado estado  $\rho$  será dado por:

$$\langle A_x \otimes B_y \otimes C_z \rangle_\rho = \sum_{a=\pm 1} \sum_{b=\pm 1} \sum_{c=\pm 1} abcp(a, b, c|x, y, z), \quad (2)$$

onde  $p(a, b, c|x, y, z)$  são as probabilidades conjuntas e essas são calculadas segundo a regra de Born, da seguinte maneira:

$$p(a, b, c|x, y, z) = \text{Tr}[\rho(A_{a|x} \otimes B_{b|y} \otimes C_{c|z})] \quad (3)$$

com  $A_{a|x}$ ,  $B_{b|y}$  e  $C_{c|z}$  sendo os operadores medição associados aos resultados  $a$ ,  $b$  e  $c$  dadas as medições  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Para cenários tripartidos onde cada parte pode realizar duas medições dicotômicas, há 46 desigualdades de Bell não-triviais, conhecidas como desigualdades de Śliwa [8], dentre as quais, as mais conhecidas são [9]:

- a desigualdade de Mermin:

$$\langle A_0 \otimes B_0 \otimes C_0 + A_1 \otimes B_1 \otimes C_0 + A_0 \otimes B_1 \otimes C_1 - A_0 \otimes B_0 \otimes C_1 \rangle \leq 2; \quad (4)$$

- a desigualdade de Svetlichny:

$$\begin{aligned} & \langle A_0 \otimes B_0 \otimes C_0 + A_1 \otimes B_0 \otimes C_0 \\ & + A_0 \otimes B_1 \otimes C_0 - A_1 \otimes B_1 \otimes C_0 \\ & + A_0 \otimes B_0 \otimes C_1 - A_1 \otimes B_0 \otimes C_1 \\ & - A_0 \otimes B_1 \otimes C_1 - A_1 \otimes B_1 \otimes C_1 \rangle \leq 4. \quad (5) \end{aligned}$$

Para medições e estados adequadamente escolhidos, é possível violar as desigualdades de Mermin e de Svetlichny até os valores de 4 e  $4\sqrt{2}$ , respectivamente. A desigualdade de Svetlichny possui a peculiaridade de só ser violada em sistemas que apresentam não-localidade genuinamente multipartida.

## Aproximação estocástica de perturbação simultânea

Definidos o estado quântico e a desigualdade de Bell pode-se parametrizar um operador de Bell  $\mathcal{B}$ , operador das medições, por um conjunto de parâmetros  $\Theta$  e então o processo de encontrar a violação máxima de desigualdades de Bell se torna um problema de otimização, de maximização de uma função paramétrica que tem a seguinte forma:

$$V(\Theta) = \text{Tr}[\rho \mathcal{B}(\Theta)] \quad (6)$$

O aeps é um método iterativo, introduziremos um conjunto de parâmetros iniciais  $\Theta_0$  e denotaremos o conjunto de parâmetros no passo  $k$  por  $\Theta_k$ . Um vetor  $p$ -dimensional de perturbação aleatória  $\Delta_k = [\Delta_{k1}, \dots, \Delta_{kp}]^T$  é criado a cada iteração, cada elemento do vetor  $\Delta_k$  é escolhido aleatoriamente dentre os elementos da distribuição  $\{-1, 1\}$  e  $p$  diz respeito à quantidade de variáveis do problema de otimização. Então, a aproximação estocástica do gradiente tem a seguinte forma:

$$g_k(\Theta_k) = \frac{V(\Theta_k + c_k \Delta_k) - V(\Theta_k - c_k \Delta_k)}{2c_k} [\Delta_{k1}^{-1}, \dots, \Delta_{kp}^{-1}]^T \quad (7)$$

e o conjunto de parâmetros  $\Theta_k$  é atualizado para:

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + a_k g_k(\Theta_k) \quad (8)$$

onde  $c_k = [c/(k+1)^\gamma]$  e  $a_k = [a/(k+1+A)^\alpha]$  controlam o tamanho do gradiente e do passo entre as iterações, respecti-

vamente. As constantes  $A \geq 0$ ,  $a > 0$  e  $c > 0$  são escolhidas empiricamente de acordo com o problema de otimização. O valor médio final do operador de Bell é dado por  $V(\Theta_N)$ , para um número desejado de iterações  $N$ . Este valor é uma cota inferior para a violação máxima da desigualdade de Bell em questão.

## See-Saw

O see-saw é um método de programação semi-definida (PSD) baseado em otimização convexa [5] que pode ser implementado de maneira a maximizar o valor médio de operadores de Bell para estados quânticos predeterminados.

A aplicação do método à violação máxima desigualdades de Bell consiste em maximizar o valor médio do operador de Bell tendo como variáveis os observáveis de uma das partes do sistema. Pode-se aplicar o método de maneira recursiva até atingir um valor ótimo, alterando apenas a parte do sistema a ser otimizada a cada iteração. Exemplificando, para a desigualdade de Svetlichny, pode-se otimizar as medições de Alice seguindo o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} & \text{dados } \rho, \{B_y\}, \{C_z\} \\ & \text{maximize } Tr(\rho \mathcal{B}_{Svetlichny}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{sujeito a } A_x - \mathbb{1} \succeq 0 \text{ e } \mathbb{1} - A_x \succeq 0, \forall x,$$

onde  $\rho$  é o estado do sistema,  $\{B_y\}$  e  $\{C_z\}$  são os conjuntos de medições de Bob e Charlie, respectivamente, e  $\mathcal{B}_{Svetlichny}$  é o operador de Svetlichny. Dessa forma, sempre é possível obter valores que convergem para pontos localmente ótimos, ou seja, máximos locais.

## Resultados e discussões

Primeiramente, com o intuito de comparar suas respectivas eficácias em maximizar o valor médio de desigualdades de Bell, ambos os métodos foram aplicados à desigualdade de Svetlichny para um estado quântico de três qubits puro e maximamente emaranhado, o estado de Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)  $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ , cujo operador densidade associado é dado por  $\rho_{GHZ} = |GHZ\rangle\langle GHZ|$ .

Os parâmetros de comparação utilizados foram a acurácia em atingir uma cota inferior para o valor teórico da violação máxima da desigualdade de Svetlichny, bem como o número de

iterações e o tempo de execução necessários para tanto. Para o método aeps, os parâmetros iniciais utilizados foram  $A = 0$ ,  $a = 2.1$ ,  $c = 0.01$ ,  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 2$ . Já para o método see-saw, foram necessários, além do estado do sistema, apenas dois conjuntos de medições iniciais  $\{B_y\}$  e  $\{C_z\}$ , sorteados aleatoriamente a partir de parametrizações na esfera de Bloch [10]. Em ambos os métodos o número máximo de iterações foi fixado em  $k_{max} = 50$  e o seguinte critério de convergência (ou saturação) foi adotado:

$$\epsilon_{k-1} < 10^{-4} \quad (10)$$

onde  $\epsilon_{k-1}$  representa a diferença entre o valor médio da desigualdade na iteração  $k$  e na iteração  $k - 1$  para  $k \geq 2$ .

Definidos os parâmetros, ambos os métodos foram executadas  $2 \times 10^3$  vezes. Utilizando o método aeps, foi possível encontrar valores com acurácia mínima de 95% em 10% das execuções e a acurácia máxima encontrada foi de 99,84%. Além disso, o tempo médio de execução, Fig. 1 (em azul), e a iteração média de saturação, Fig. 2 (a), foram  $\langle t_{aeps} \rangle = 2.06$  s e  $\langle k_{aeps} \rangle = 22$ , respectivamente. Já para o see-saw, foram encontrados em 46% das aplicações, valores com acurácia mínima de 95% e a acurácia máxima foi de 99,99%. Em relação às médias de tempo de execução, Fig. 1 (em cinza), e de iteração saturação, Fig. 2 (b), os valores foram  $\langle t_{ss} \rangle = 1.41$  s e  $\langle k_{ss} \rangle = 5$ , respectivamente.

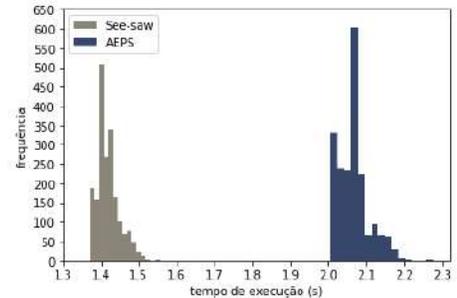


Figura 1: frequências dos tempos de execução dos métodos numéricos aeps e see-saw aplicados à desigualdade de Svetlichny para o estado quântico GHZ.

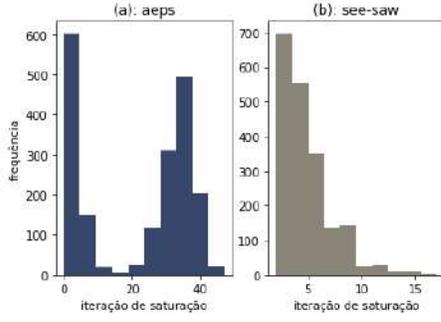


Figura 2: frequências das iterações de saturação dos métodos numéricos aeps e see-saw aplicados à desigualdade de Svetlichny para o estado quântico GHZ.

O método see-saw se mostrou mais eficiente que o aeps em todos os parâmetros avaliados. No que tange a acurácia em atingir cotas inferiores para o máximo do valor médio da desigualdade de Svetlichny para o estado GHZ, foi possível, com a utilização do see-saw, encontrar cotas inferiores mais próximas do valor teórico, cerca de 0,15% superiores às encontradas a partir do aeps. Em relação à comparação ao tempo de execução de ambos os métodos, em média, o método see-saw utilizou 68% do tempo necessário para a execução do aeps. Por fim, o número médio de iterações necessárias para a saturação utilizando o aeps foi cerca de quatro vezes maior em relação ao see-saw.

Uma vez constatada a superioridade na eficiência do see-saw em maximizar o valor médio da desigualdade de Svetlichny, definiu-se que o estudo das desigualdades de Śliwa em estados aleatórios seria efetuado por meio desse método. As duas primeiras desigualdades escolhidas foram a de Mermin e a de Svetlichny. Então, sorteou-se aleatoriamente, segundo a distribuição de Haar,  $1 \times 10^3$  estados quânticos emaranhados puros.

Então, a partir da aplicação do see-saw nas desigualdades de Mermin e de Svetlichny para os  $1 \times 10^3$  estados sorteados, pode-se estudar, estatisticamente, a natureza das correlações apresentadas por essa família de estados nos cenários de Mermin e de Svetlichny.

Para ambas as desigualdades, os máximos dos valores médios das desigualdades obtidos para os estados sorteados na distribuição de Haar puderam ser aproximados por distribuições normais. Em média, esses estados violam a desigualdade de Mermin até o valor 3.1 e há uma dispersão em torno da média de  $\sigma^2 \approx 0.4$ , Fig. 3. Já para a desigualdade de Svetlichny, em média, os máximos dos valores médios encontrados foram de 4.3, o que representa violação, embora haja uma dispersão de  $\sigma^2 \approx 0.5$  em torno da média, Fig. 4.

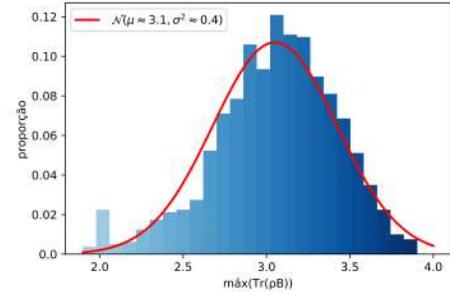


Figura 3: modelo probabilístico para o máximo do valor médio do operador de Mermin para mil estados puros sorteados segundo a distribuição de Haar.

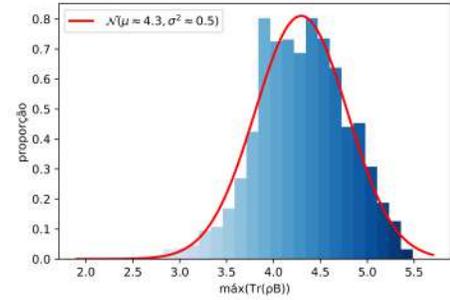


Figura 4: modelo probabilístico para o máximo do valor médio do operador de Svetlichny para mil estados puros sorteados segundo a distribuição de Haar.

Posteriormente, foram estudadas as 44 desigualdades de Śliwa restantes. Cada um dos mil estados emaranhados puros sorteados previamente foram submetidos aos 44 cenários e à aplicação do método see-saw a fim de maximizar os valores médio dos operadores de Śliwa. O número de desigualdades de Śliwa violadas por cada estado emaranhado puro sorteado também pôde ser modelado segundo uma distribuição normal, Fig. 5. Em média, cada estado emaranhado puro violou 33 das 46 desigualdades de Śliwa, o que representa aproximadamente 70% das desigualdades, e a dispersão associada foi de  $\sigma^2 \approx 4$ .

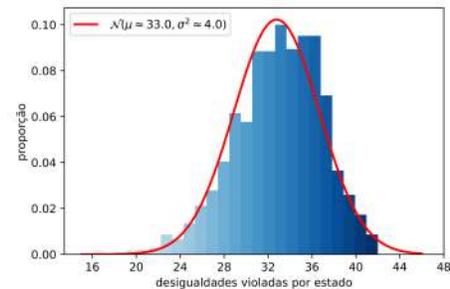


Figura 5: modelo probabilístico para o número de desigualdades de Śliwa violadas por cada estados emaranhado puro sorteado segundo a distribuição de Haar.

Por fim, foram sorteados, segundo a distribuição de Ginibre,  $1 \times 10^3$  estados emaranhados mistos. Analogamente ao

executado para os estados emaranhados puros, os mil estados emaranhados mistos foram submetidos a todos os cenários de Śliwa e à aplicação do see-saw. O número de desigualdades violadas por cada estado emaranhado misto sorteado pôde ser modelado probabilisticamente segundo uma distribuição normal enviesada à esquerda (ou distribuição normal de cauda à direita) com média 1 e dispersão  $\sigma^2 \approx 2$ , Fig. 6, o que representa que existem violações para apenas 2.2% das desigualdades de Śliwa quando se utilizam estados emaranhados mistos aleatórios.

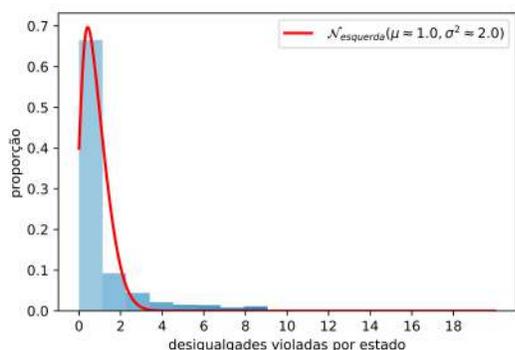


Figura 6: modelo probabilístico para o número de desigualdades de Śliwa violadas por cada estados emaranhado misto sorteado segundo a distribuição de Ginibre.

## Conclusões e agradecimentos

A execução deste trabalho possibilitou o estudo dos métodos numéricos aeps e see-saw aplicados à violação MVDB para sistemas tripartidos. Concluiu-se que o see-saw tem eficiência superior ao aeps em todos os aspectos analisados e portanto sua utilização é mais indicada em se tratando do estudo de desigualdades de Bell. A partir dessa constatação, foi possível utilizar o método see-saw para estudar a localidade e a não-localidade de famílias de estados quânticos aleatórios emaranhados puros e mistos.

Todos os conjuntos de dados aqui apresentados tiveram seus comportamentos modelados segundo distribuições normais e essas, como se pôde observar, não representam com acurácia necessária o comportamento dos sistemas analisados.

A execução deste trabalho só foi possível graças à concessão de acesso aos recursos fornecidos pelo cluster Planck, que é um

cluster de processamento da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) que foi adquirido com recursos do projeto de multiusuário da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), em 2010. Todos os resultados aqui apresentados foram produzidos nesse cluster de processamento.

## Referências

- [1] V. Scarani and N. Gisin. “Quantum Communication between N Partners and Bell’s Inequalities” *Phys. Rev. A* **87**, 117901 (2001).
- [2] V. Scarani and N. Gisin. “Quantum key distribution between N partners: Optimal eavesdropping and Bell’s inequalities” *Phys. Rev. A* **65**, 012311 (2001).
- [3] N. Brunner, J. Sharam, and T. Vértesi, “Testing the Structure of Multipartite Entanglement with Bell Inequalities” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 110501 (2012).
- [4] L.-K. Yang, G. Chen, W.-H. Zhang, X.-X. Peng, S. Yu, C.-F. Li, G.-C. Guo. “Self-guided method to search maximal Bell violations for unknown quantum states”. *Phys. Rev. A* **96**, 052310 (2017).
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe. “Convex Optimization”, Cambridge University Press (2004).
- [6] R. F. Werner, M. M. Wolf. “Bell inequalities and entanglement”. *Quantum Information & Computation* **1**, 3 (2001).
- [7] J. Maziero. “Random sampling of quantum states: a survey of methods”. *Braz. J. Phys.* **45**, 575 (2015)
- [8] D. Śliwa. “Symmetries of the Bell correlation inequalities”. *Phys. Lett. A* **317** 165 (2003).
- [9] López-Rosa, Sheila and Xu, Zhen-Peng and Cabello, Adán. “Maximum nonlocality in the (3,2,2) scenario”. *Phys. Rev. A* **94** 062121 (2016).
- [10] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. “Quantum Computation and Quantum Information”. *Cambridge University Press*, 2010.