

ESTUDO NUMÉRICO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Palavras-Chave: pêndulo simples, pêndulo forçado, sistemas dinâmicos

Autores/as:

Sarah Dantas Rothéia Carvalho – Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Tecnologia

Prof. Dr. Varese Salvador Timóteo – Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Tecnologia

INTRODUÇÃO:

Sistemas dinâmicos descrevem uma variedade de fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento, desde dinâmicas de população na biologia, reações químicas, problemas de mecânica, até simulações de interações planetárias na astrofísica. No entanto, a maioria das equações diferenciais que modelam os sistemas mais realistas não apresenta soluções analíticas, sendo necessário resolver numericamente para encontrar soluções aproximadas (STUART; HUMPHRIES, 1996).

Dessa forma, o estudo e o desenvolvimento de métodos numéricos para solução de equações diferenciais é importante para várias áreas da ciência e da tecnologia.

A seguir vamos discutir um exemplo de sistema dinâmico simples que apresenta os dois regimes: linear e não-linear e um exemplo de sistema dinâmico mais complexo que apresenta comportamento caótico.

METODOLOGIA:

Um código em Fortran e no Wolfram Mathematica foi desenvolvido para simular o

sistema do pêndulo simples e do pêndulo simples forçado. No Fortran, os dados foram gravados em um arquivo e representados graficamente pelo Mathematica. Para as equações lineares e não lineares de movimento foi utilizado uma malha para discretização da equação diferencial do pêndulo.

Na primeira parte do projeto focou-se na análise numérica das diferenças entre os regimes linear e não-linear de um sistema dinâmico simples, o pêndulo simples, representado na Figura 1. No qual foi utilizada a equação não-linear que descreve esse movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin(\theta) = 0 \quad (1)$$

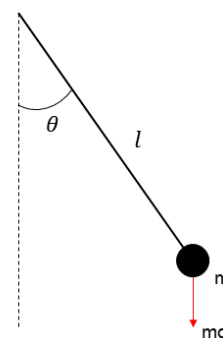


Figura 1 – Esquema de forças do pêndulo simples.

Onde θ é o ângulo entre o eixo vertical e o fio do pêndulo, l o comprimento do fio e g é a aceleração da gravidade. E a equação linearizada, que pode ser aproximada para ângulos de lançamento pequenos ($\theta \sim 0$):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0 \quad (2)$$

A eq. (2) corresponde a um movimento harmônico simples com frequência angular $\omega = \sqrt{g/l}$.

A eq. (1), apesar da não linearidade, pode ser resolvida numericamente com a discretização das variáveis envolvidas, o tempo e o ângulo. A partir do Método das Diferenças Finitas (MDF), discretizou-se o tempo e o espaço transformando a equação de segunda ordem em duas equações de primeira ordem:

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}}{\Delta t} = \alpha_{m,n}, \quad (3)$$

$$\frac{d\alpha_{m,n}}{dt} \approx \frac{\alpha_{m+1,n} - \alpha_{m,n}}{\Delta t} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin(\theta_{m,n}) = 0$$

No qual m representa o tempo, n o espaço e α a velocidade angular. Desta forma, obteve-se o ângulo e a velocidade angular como função do tempo, partindo das condições iniciais $\theta(t_0)$ e $\alpha(t_0)$.

I) Para garantir a precisão do método, foi feita a simulação para condições iniciais $\theta(0) = 1$ rad, variando o tamanho passo (dt). Os passos avaliados foram: $dt = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ e 10^{-4} .

II) Para avaliar a influência do ângulo inicial as seguintes condições adotadas foram: $\theta(0) = 0.1, 0.3, 1.0, 3.14$ e $\alpha(0) = 0, 0, 0, 0$, respectivamente para ambas as equações linear e não-linear.

Na segunda parte do projeto foi analisado o mesmo pêndulo, porém sujeito à duas forças: uma força externa harmônica $F(t) = -F_0 \cos(\Omega t)$, com frequência angular Ω e amplitude F_0 e a força de resistência do ar $R = -\gamma\alpha$, ambas contrárias ao movimento do pêndulo como ilustrado na Figura 2.

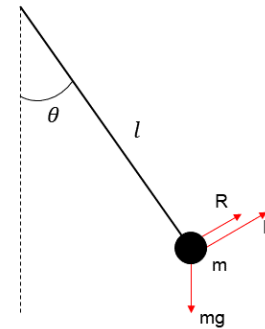


Figura 2 – Esquema do pêndulo simples forçado e sujeito à força de resistência do ar

Acrescentando essas forças nas eq. (3) obtém-se a equação que descreve o movimento do pêndulo forçado:

$$\theta_{m+1,n} = \theta_{m,n} + \alpha_m, \quad (4)$$

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m - \left(\frac{g}{l}\right)\sin(\theta_m)\Delta t + \frac{F(t)}{ml}\Delta t - \gamma\alpha\Delta t$$

Segundo Provenzale e Balmforth (1998), um sistema dinâmico requer no mínimo 3 dimensões de espaço de fase para apresentar um comportamento caótico quando descrito por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Dessa forma, as variáveis adotadas F_0 , γ , e Ω , foram fixadas para estudar o comportamento e a influência da variação de um dos parâmetros procurando por sinais de comportamento caótico nas equações lineares.

Ainda, para simplificação foi adotado que $m = 1\text{kg}$ e $l = 1\text{m}$ para a maioria das simulações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Verificando inicialmente o tamanho do passo (dt) a ser utilizado nas simulações do pêndulo simples no Fortran, realizou-se o comparativo abaixo:

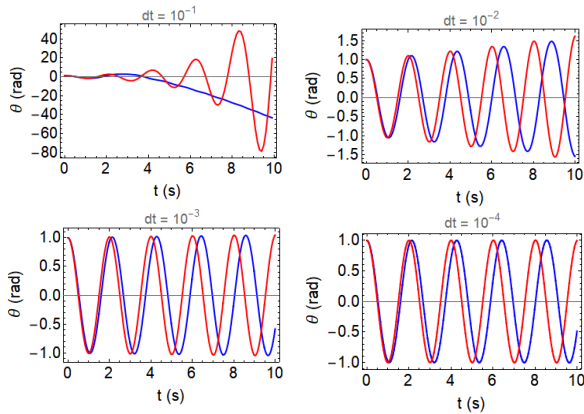


Figura 3 – Variação do passo (dt) da aproximação Linear (Vermelho) e Não-Linear (Azul) do pêndulo simples para $\theta(0) = 1\text{rad}$.

A partir dos gráficos da Figura 3 é possível verificar que quanto menor o valor do passo mais preciso é a aproximação do (MDF), assim, o menor passo que oferece a precisão adequada é $dt = 10^{-3}$. Para tamanho de passos com ordem de grandeza menores, o gráfico se mantém idêntico. Dessa forma, o passo utilizado para as simulações seguintes é $dt = 10^{-3}$.

Comparação da aproximação linear e não-linear:

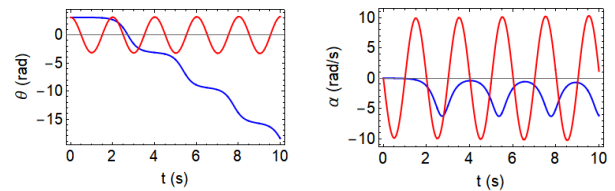
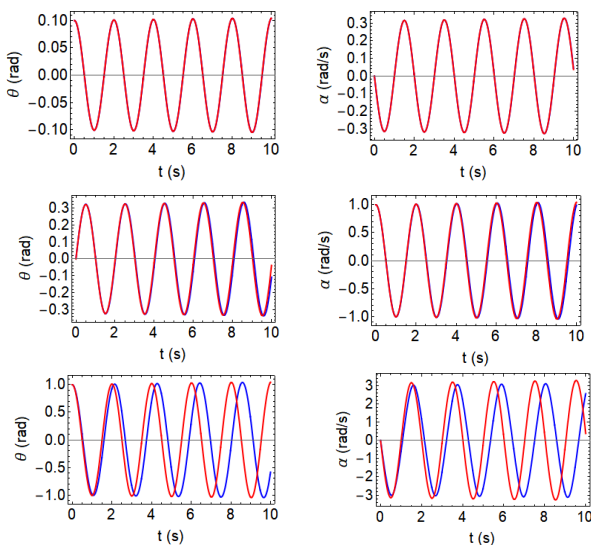


Figura 4 – Comparação da aproximação Linear (Vermelho) e Não-Linear (Azul) do pêndulo simples para $\theta(t)$ e $\alpha(t)$.

Pela Figura 4, percebe-se que para pequenos ângulos iniciais o comportamento da curva de aproximação linear se mostra válido, no entanto, à medida que o ângulo inicial aumenta a aproximação de $\sin \theta = \theta$ se mostra cada vez mais imprecisa. Além disso, devido a aproximação linear, a curva em vermelho se mantém sempre uma onda senoidal, enquanto que, na aproximação não-linear o comportamento não se verifica. Isso pode ser percebido para ângulos grandes como, para $\theta = 1.0$ rad e, de forma mais destoante, para $\theta = 3.14$ rad, quando o lançamento ocorre quase verticalmente.

Agora utilizando a eq. (4) para simular o comportamento do pêndulo forçado, tem-se a fixação dos parâmetros $\gamma = 0.5, \Omega = 1.0, \theta = 0.5\text{rad}, g = 9.8\text{m/s}^2, l = 1\text{m}$ e a variação da força F_0 , para avaliar a influência dela no comportamento do pêndulo.

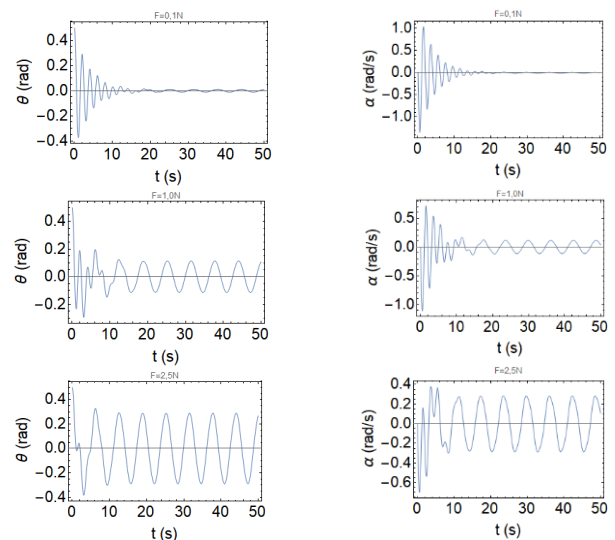


Figura 5 – Variação do parâmetro F_0 da aproximação não-linear da equação do pêndulo forçado.

Pela Figura 5 é possível perceber que aumentando o valor de F_0 e mantendo os demais parâmetros, a amplitude do movimento aumenta, o que é esperado, dado a característica dessa força. Percebe-se isso pelo aumento do θ e do α .

Agora o parâmetro variado é o γ , tendo fixado: $F_0 = 1\text{N}$, $\Omega = 1.0$, $\theta = 0.5\text{rad}$, $g = 9,8\text{ m/s}^2$, $l = 1\text{m}$.

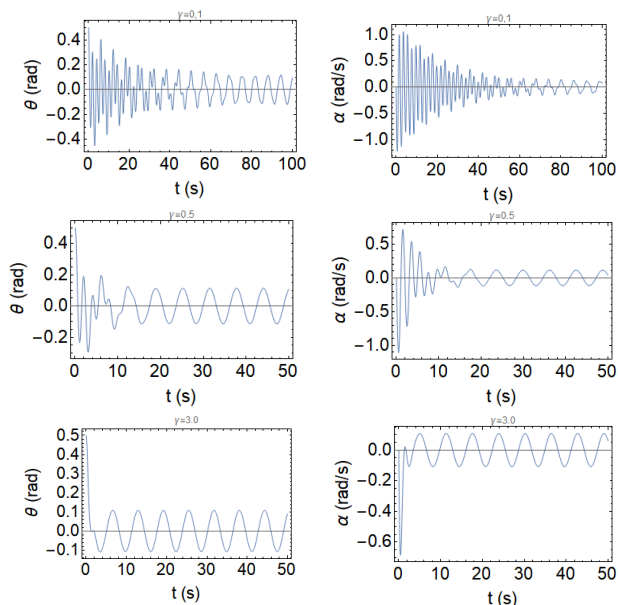


Figura 6 – Variação do parâmetro γ da aproximação não-linear da equação do pêndulo forçado.

A partir dos gráficos da Figura 6 nota-se que quanto maior o γ maior a frequência de oscilações, isso ocorre, pois quanto menor a força de resistência R mais rápida se dará a oscilação do pêndulo.

O próximo parâmetro a ser variado é o Ω , tendo fixado: $F_0 = 1\text{N}$, $\gamma = 0.5$, $\theta = 0.5\text{rad}$, $g = \frac{9.8\text{m}}{\text{s}^2}$, $l = 1\text{m}$.

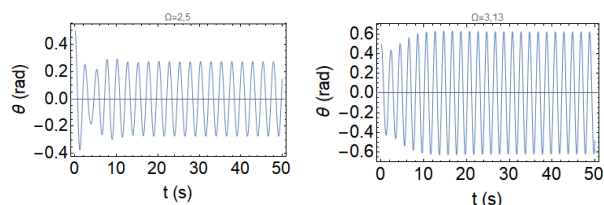
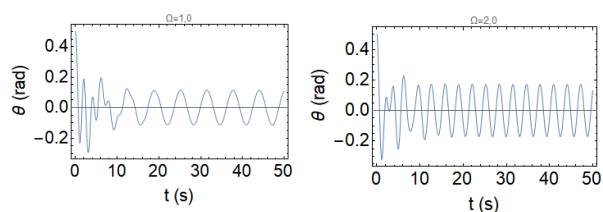


Figura 7 – Variação do parâmetro Ω da aproximação não-linear da equação do pêndulo forçado.

Nota-se que pelo aumento de Ω ocorre também o aumento da frequência angular de oscilações, no entanto $\Omega = 3.13\text{ rad/s}$ trata-se de um caso especial. Quando a frequência $\Omega \rightarrow \omega$ maiores se tornam as amplitudes, até que na condição de $\Omega = \omega$ ocorre o fenômeno da ressonância (KHARKONGOR; MAHATO, 2018).

Ainda, após o estudo da influência dos parâmetros no movimento do pêndulo, buscou-se identificar comportamentos caóticos na combinação desses valores. Por (EHWERHEMUEPH; AKPOJOTOR, 2013) encontrou-se que a composição de $g = 9,8\text{m/s}^2$, $l = 9,8\text{m}$, $\gamma = 0.05$, $\Omega = \frac{1}{3}$, $\theta(0) = \frac{\pi}{18}$ e $\alpha(0) = \frac{\pi}{36}$ para determinadas forças ocasionava um comportamento caótico. Alterando as forças utilizadas pelos autores percebeu-se que para valores de $F_0 > 8.0\text{N}$ a forma da onda era completamente caótica. Como mostrado na figura abaixo:

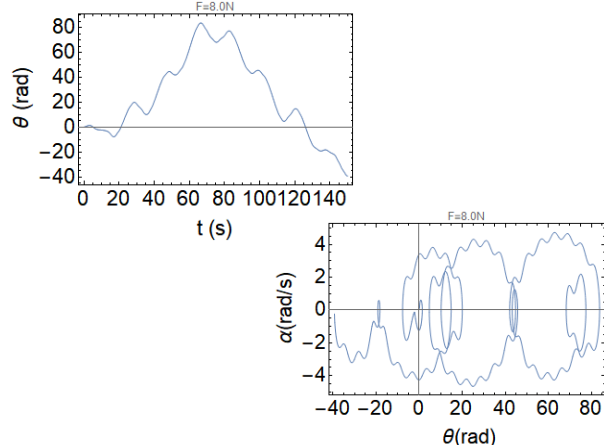


Figura 8 – Sistema de pêndulo simples forçado exibindo comportamento caótico para $F_0=8.0\text{N}$.

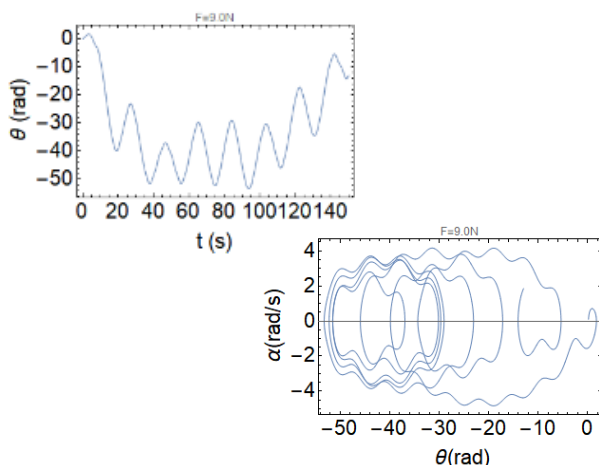


Figura 9 – Sistema de pêndulo simples forçado exibindo comportamento caótico para $F_0=9.0N$.

CONCLUSÕES:

A aplicação de métodos numéricos torna fácil entendimento e visualização do comportamento do pêndulo simples. Esse sistema, tão conhecido e de aparente pouca complexidade, com algumas configurações pode ter uma dinâmica caótica.

O comportamento caótico pode ser atingido para um certo arranjo de valores, porém, são necessários mais estudos para determinar outras combinações de parâmetros que levam o pêndulo simples forçado com força resistência do ar ao movimento caótico.

BIBLIOGRAFIA:

EHWERHEMUEPH Louis; AKPOJOTOR, Godfrey. **Simulation and Visualization of Chaos in a Driven Nonlinear Pendulum: An Aid to Introducing Chaotic Systems in Physics**. 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/237053831_Simulation_and_Visualization_of_Chaos_in_a_Driven_Nonlinear_Pendulum_An_Aid_to_Introducing_Chaotic_Systems_in_Physics. Acesso em: 24 jul. 2021.

KHARKONGOR, D; MAHATO, Mangal C. Resonance oscillation of a damped driven simple pendulum. **European Journal Of Physics**, v. 39, n. 6, p. 065002, 2018. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aadaf0>. Acesso em: 24 jul. 2021.

PROVENZALE, Antonello; BALMFORTH, Neil J. **Chaos and Structures in Geophysics and Astrophysics**. Woods Hole, 1998. Disponível em: <https://www.who.edu/fileservers.do?id=21476&pt=10&p=17353>. Acesso em: 19 jun. 2021.

STUART Andrew; HUMPHRIES A. R. **Dynamical Systems and Numerical Analysis**. Cambridge, Cambridge University Press, 1996. Disponível em: https://books.google.com.br/books/about/Dynamical_Systems_and_Numerical_Analysis.html?id=yMQA8s5pNIC&redir_esc=y. Acesso em: 10 jun. 2021.