



# Aplicações dos sistemas de Filippov a modelos de Engenharia Elétrica: otimização de conversores DC-DC

Palavras-Chave: Sistemas dinâmicos, conversores dc-dc, otimização

## Autores

**Aluna:** Nicole Karen Moura de Jesus, UNICAMP

**Orientador:** Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins, UNICAMP

## I. INTRODUÇÃO

A teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Suaves (SDNS) tem se desenvolvido rapidamente, principalmente devido às suas fortes relações com campos aplicados, como mecânica, engenharia aeroespacial, física, economia entre outros [3], [4]. Nesta fronteira, encontramos os conversores DC-DC, importantes para as fontes de energia renováveis que, cada vez mais, são necessárias em função da sobrecarga das redes e de seus sistemas de distribuição.

A crescente motivação para a utilização de fontes de energias renováveis está relacionada com a redução das emissões de  $CO_2$  e com a melhoria da qualidade de vida. Isto é potencializado em comunidades pequenas, isoladas e autônomas, onde o acesso a fontes de energia renováveis é a única solução para satisfazer as suas necessidades energéticas [6]. Esta necessidade, todavia, está acompanhada do desafio de entender e desenvolver modelos matemáticos que possibilitem aprimorar o processo de conversão de energia elétrica através dos conversores DC-DC, que possuem importantes aplicações no aproveitamento de fontes renováveis de energia elétrica e nos veículos elétricos [5].

Em muitos casos, os SDNS são descritos por sistemas de equações diferenciais definidas por partes, onde temos equações diferenciais suaves definidas em certas regiões do retrato de fase, separados por interfaces, chamadas regiões de descontinuidade [3].

Em geral não há unicidade de soluções em SDNS e isto é bem visto, pois permite a introdução de um controlador. O conceito de solução deslizante (*sliding motion*) já estava presente em vários modelos no final do século passado.

## II. SISTEMAS DE FILIPPOV

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e considere  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave que tem 0 como valor regular. Definimos  $\Sigma = f^{-1}(0)$  a variedade de descontinuidade.

Vamos denotar

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\}$$

e

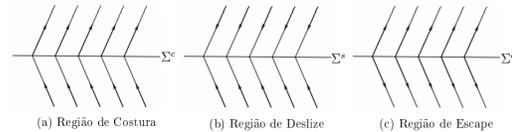
$$\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\}$$

Definimos agora o SDNS (ou sistema de Filippov)

$$Z_{\Sigma} = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (1)$$

no qual  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais suaves em  $\overline{\Sigma^+}$  e  $\overline{\Sigma^-}$ , respectivamente. Denotaremos  $Z = (X, Y)$ . Distinguiremos três regiões em  $\Sigma$ :

- Região de Costura:  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$
- Região de Deslize Estável:  
 $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$ .
- Região de Deslize Instável ou Região de Escape:  
 $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$



**Figura 1:** Exemplos das três regiões definidas na variedade de descontinuidade. Fonte: [7]

Dizemos que  $p \in \Sigma$  é um ponto de tangência se  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$ . Os pontos de tangência são as fronteiras dos conjuntos  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  e  $\Sigma^e$ , que são conjuntos abertos. As regiões definidas acima não consideram os pontos de equilíbrio, e assim, de fato, a trajetória que atravessa  $p$  é tangente à  $\Sigma$ . É importante destacar também os pontos que surgem na fronteira das regiões, denominados  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^s$  e  $\partial\Sigma^e$ , já que a derivada de Lie de  $f$  com respeito a cada campo vetorial também inclui os pontos  $p \in \Sigma$  em que o campo avaliado em  $p$  é nulo, ou seja, os pontos críticos de cada campo vetorial em  $\Sigma$ .

Se  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^u$ , definimos o campo vetorial deslizante do sistema de Filippov  $Z = (X, Y)$  como o campo vetorial  $Z^s$ , que é a combinação linear convexa de  $X$  e  $Y$  tangente a  $\Sigma$ , ou seja,

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} (Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p))$$

Se  $p \in \Sigma^+$  ou  $p \in \Sigma^-$ , a trajetória de  $p$  é a mesma trajetória de  $p$  pelo campo  $X$  ou pelo campo  $Y$ , respectivamente. Agora, se  $p \in \Sigma$ , então definimos a trajetória de  $p$  conforme  $p$  está em  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^s$  ou  $\Sigma^u$ .

**Definição 1.** As singularidades do sistema de Filippov são:

1.  $p \in \Sigma^\pm$  tal que  $p$  é um equilíbrio de  $X$  ou de  $Y$ , isto é,  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$  respectivamente.
2.  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma_e$  tal que  $p$  é um pseudo-equilíbrio, isto é,  $Z^s(p) = 0$ .
3.  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ , isto é, os pontos  $p$  tais que  $Xf(p) = 0$  ou  $Yf(p) = 0$  (tangências regulares ou singulares).

Qualquer outro ponto é chamado de ponto regular.

Nota-se ainda que, caso o pseudo-equilíbrio  $p$  se comporte como um nó, um foco ou uma sela para a dinâmica em  $\Sigma$ ,  $p$  é denominado como um pseudo-nó, pseudo-foco ou pseudo-sela, respectivamente.

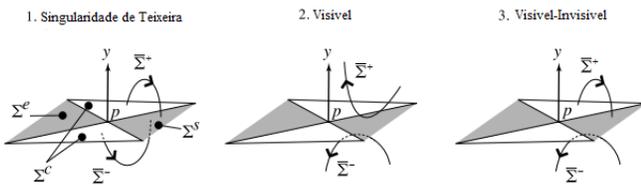
**Definição 2.** Um campo vetorial suave  $X$  possui uma dobra ou tangência quadrática com  $\Sigma = \{(x, y) \in U | f(x, y) = 0\}$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xf(p) = 0$  e  $X^2f(p) \neq 0$ .

Seja  $Z = (X, Y) \in \Omega$  em que  $(0,0)$  é um ponto tipo dobra-dobra ( $Xf(0,0) = Yf(0,0) = 0$  e  $X^2f(0,0) \neq 0$ ,  $Y^2f(0,0) \neq 0$ ). Teremos alguns casos distintos para analisar, dependendo da visibilidade/invisibilidade da tangência quadrática para cada um dos campos e também das direções de  $X$  e  $Y$  no ponto de dobra.

**Definição 3.** Sejam  $Z = (X, Y)$  e  $p \in \Sigma$  um ponto de dobra-dobra. Dizemos que  $p$  é uma dobra visível para  $X$  se  $X^2f(p) > 0$  e invisível se  $X^2f(p) < 0$ , enquanto que  $p$  é uma dobra visível para  $Y$  se  $Y^2f(p) < 0$  e invisível se  $Y^2f(p) > 0$ .

A singularidade dobra-dobra pode ser classificada como:

1. Singularidade de Teixeira:  $X^2f(p) < 0 < Y^2f(p)$
2. Visível:  $Y^2f(p) < 0 < X^2f(p)$
3. Visível-Invisível:  $X^2f(p) \cdot Y^2f(p) > 0$



**Figura 2:** Tipos de dobra-dobra: 1. A singularidade de Teixeira, 2. Dobra-dobra Visível e 3. Dobra-dobra Visível-Invisível. Adaptado de [2]

## II-A. Na bifurcação TS

A bifurcação TS está relacionada à colisão de um pseudo-equilíbrio real com um TS-point. Esta colisão é produzida, como resultado da alteração de um parâmetro, digamos  $\mu \in \mathbb{R}$ , pela transição de um pseudo-equilíbrio entre as regiões de deslizamento atrativas e repulsivas, passando necessariamente pelo ponto TS. Portanto, reescreve-se a equação (1), em que  $F^\pm : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e uma função escalar  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de maneira que  $\Sigma = x \in \mathbb{R}^3, h(x) = 0$ , dependendo do parâmetro  $\mu$ :

$$\dot{x} = \begin{cases} F^-(x, \mu), & \text{if } h(x, \mu) < 0 \\ F^+(x, \mu), & \text{if } h(x, \mu) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Define-se a bifurcação TS no sistema (2), assumindo que as linhas de tangência são transversais em  $\hat{x}(\mu)$  (TS-point) para  $\mu$  em uma vizinhança de 0 e que existe um pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}(\mu)$  que transita entre as duas diferentes regiões deslizantes para o valor crítico  $\mu = 0$  do parâmetro.

**Definição 4.** O sistema 3D-SDNS (3) sofre uma bifurcação TS para  $\mu = 0$  se houver um ponto de tangência dupla  $\hat{x}(\mu)$  e um ponto de pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}(\mu)$ , definido para todos os  $\mu$  em uma vizinhança de 0, tal que  $\tilde{x}(\mu) = \hat{x}(\mu)$  e

$$\frac{d}{d\mu} L_{F^+} h(\tilde{x}(\mu), \mu) \Big|_{\mu=0} < \frac{d}{d\mu} L_{F^-} h(\tilde{x}(\mu), \mu) \Big|_{\mu=0} < 0 \quad (3)$$

e também,

$$L_{F^+}^2 h(\tilde{x}(0), 0) < 0, \quad L_{F^-}^2 h(\tilde{x}(0), 0) > 0. \quad (4)$$

Observe que  $L_{F^+} h(\tilde{x}(0), 0) = L_{F^-} h(\tilde{x}(0), 0) = 0$ , porque  $\tilde{x}(0) = \hat{x}(0)$  é um ponto de tangência duplo. A condição (3) indica que para  $\mu = 0$  as funções  $L_{F^+} h(\tilde{x}(\mu), \mu) = L_{F^-} h(\tilde{x}(\mu), \mu)$  têm sinais opostos, e seus gráficos são transversais em  $\mu = 0$ . A condição (4) garante que a tangência dupla  $x$  é uma singularidade dupla de tipo invisível para  $\mu = 0$ , ou seja,  $\tilde{x}(0) = \hat{x}(0)$  é um TS-point.

A bifurcação TS provoca o surgimento de um ciclo de limite de cruzamento (CLC) que nasce do TS-point, podendo ser classificado como estável ou instável. O CLC é uma órbita periódica composta por dois arcos, cada um definido por um dos campos vetoriais  $F^\pm$ , cruzando a variedade  $\Sigma$  em dois pontos e sem quaisquer segmentos deslizantes.

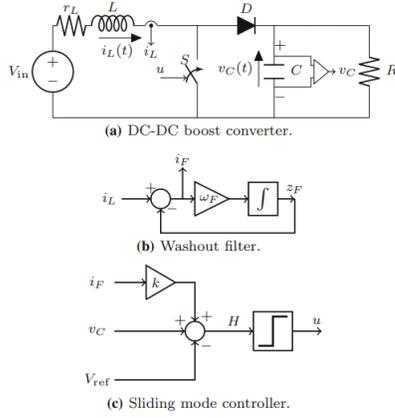
## III. ANÁLISE DE BIFURCAÇÃO DE UM CONVERSOR DE ENERGIA boost

Com base na teoria apresentada na seção anterior, avalia-se e prova-se a existência de uma bifurcação de Teixeira num SDNS em 3D, que modela um conversor de energia boost.

### III-A. Modelagem e controle de um conversor DC – DC Boost.

Seja o conversor boost abaixo, no qual  $R, L, C, r_L$  e  $V_{in}$  são, respectivamente, a carga resistiva, a indutância, a capacitância, a resistência do indutor e a fonte de tensão.

A tensão de saída  $v_{out}$ , é igual à tensão sobre a carga resistiva  $R$ , dita  $= v_C$ , e é regulada através de uma estratégia de controle por modos deslizantes com base no uso de um



**Figura 3:** Conversor boost com SMC e um filtro washout. A função de controle é (9). A corrente filtrada do indutor,  $i_F = i_L - z_F$ , representa a diferença entre a corrente do indutor  $i_L$  e o sinal filtrado  $z_F$ . Fonte: [1]

filtro *washout* passa-alta, de modo que seja obtido desejado valor  $v_{out} > V_{in}$  desejado. Um filtro *washout* é usado para eliminar as entradas em regime permanente enquanto deixa passar as entradas transientes. O modelo do conversor boost de malha fechada, em modo de condução contínua (corrente de indução não-nula), é dado por:

$$L \frac{di_L}{dt} = V_{in} - r_L i_L - v_C \quad (5)$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = u i_L - \frac{v_C}{R} \quad (6)$$

$$\frac{dz_F}{dt} = \omega_F (i_L - z_F) \quad (7)$$

Aqui,  $v_C > 0$  e  $i_L > 0$  são a tensão do capacitor e a corrente do indutor instantâneos. A corrente filtrada do indutor, denotada pela nova variável  $z_F$ , é a saída do filtro washout, descrito em (7) onde  $\omega_F$  é a frequência de corte do filtro. Seja a lei de controle  $u \in 0, 1$ , definido como

$$u = \frac{1}{2} (1 + \text{sign}[H]) \quad (8)$$

De modo que para  $u = 0$  (resp.  $u = 1$ ) a chave S está ligada (resp. desligada).

A superfície de controle é tal que

$$H(i_L, v_C, z_F) = v_C - V_{ref} + K(i_L - z_F) = 0 \quad (9)$$

Sendo  $K > 0$  um parâmetro de controle a ser ajustado e  $V_{ref} > V_{in}$  é a tensão de referência (valor de tensão desejado na saída). Normalizando e aplicando a mudança de variáveis, tempo e parâmetros, dados na Tabela 1 nas equações (5)-(7), obtém-se o seguinte sistema dinâmico adimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - bx - uy \\ \dot{y} &= ux - ay \\ \dot{z} &= (u - kb)x + (\omega - a - uk)y - \omega z + k - \omega y_r \end{aligned} \quad (10)$$

Variáveis de tempo e estado	Parâmetros
$x = \frac{i_L}{V_{in}} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$y_r = \frac{V_{ref}}{V_{in}}$
$y = \frac{v_C}{V_{in}}$	$a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
$z = \frac{v_C - V_{ref} + K(i_L - z_F)}{V_{in}}$	$k = K \sqrt{\frac{C}{L}}$
$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$	$b = r_L \sqrt{\frac{C}{L}}$
	$\omega = \omega_F \sqrt{LC}$

Tabela 1: Novas variáveis normalizadas, parâmetros e tempo

No qual  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as novas variáveis de estado e os novos parâmetros são  $\omega \in (0, 1]$ ,  $y_r > 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $k > 0$  (o ponto “.” indica derivadas em relação ao tempo normalizado  $\tau$ ). Note que  $x > 0$  é a corrente normalizada do indutor,  $y > 0$  é a tensão do capacitor normalizada e  $a > 0$  é o parâmetro de carga normalizada. Portanto, o sistema (10) é representado como:

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = \begin{cases} \mathbf{F}^+(x, y, z), & \text{if } z > 0 \\ \mathbf{F}^-(x, y, z), & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Composto pelos 2 campos lineares de vetores,

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx - y \\ x - ay \\ f_3^+(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}^-(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx \\ -ay \\ f_3^-(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$f_3^+ = (1 - kb)x + (\omega - a - k)y - \omega z + k - \omega y_r$$

$$f_3^- = -kbx + (\omega - a)y - \omega z + k - \omega y_r$$

### III-B. Análise do comportamento dinâmico do sistema na fronteira de comutação

Calculando as derivadas de Lie de primeira e segunda ordem da função escalar  $h(x, y, z) = z$  em relação aos campos vetoriais  $F^\pm$ , por meio das fórmulas:

$$L_{\mathbf{F}^\pm} h = f_3^\pm, \quad L_{\mathbf{F}^\pm}^2 h = \langle \nabla f_3^\pm, \mathbf{F}^\pm \rangle$$

As regiões de  $\Sigma$  são separadas por linhas de tangência

$$T_- = \{x \in \Sigma : f_3^- = (x, y, 0) = 0\},$$

$$T_+ = \{x \in \Sigma : f_3^+ = (x, y, 0) = 0\},$$

O ponto de dupla tangência está na intersecção transversal das retas  $T^\pm$ . Então, o sistema (10) tem apenas um ponto de tangência dupla, dado por  $\hat{x} = (k\hat{y}, \hat{y}, 0)$ , em que:

$$\hat{y} = \frac{k - \omega y_r}{a + bk^2 - \omega} \quad (12)$$

Sendo  $a \neq \omega - bk^2$ . O ponto de tangência dupla deve estar no primeiro quadrante em relação aos eixos  $(x, y)$  no plano  $z = 0$ , já que é necessário  $i_L > 0$  ( $x > 0$ ) e  $v_C \geq 0$  ( $y \geq 0$ ) devido às restrições operacionais do circuito. O campo vetorial deslizante em  $\Sigma$  associado ao sistema dinâmico (10) é calculado de acordo com (2), obtendo

$$F^S(x, y, 0) = \frac{1}{ky - x} \begin{bmatrix} bx^2 - x + ay^2 - \omega y(y - y_r) \\ -k(bx^2 - x + ay^2) + \omega x(y - y_r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desde que  $ky - x = 0$ . Pontos de pseudo-equilíbrio de (10) são facilmente obtidos resolvendo a equação vetorial  $F^S(x, y, 0) = (0, 0, 0)^T$ , que se reduz à quadrática  $bx^2 - x + ay^2 = 0$  mais a condição  $y = y_r$ . Portanto, temos dois pontos de pseudo-equilíbrio,

$$\tilde{x}^\pm = (\tilde{x}^\pm, y_r, 0) \quad (13)$$

Em que

$$\tilde{x}^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4aby_r^2}}{2b} > 0 \quad (14)$$

Para qualquer  $a \leq a_{NS}$ , com  $a_{NS} = \frac{1}{4by_r^2}$ . Para  $a = a_{SN}$ , ocorre uma colisão entre eles, ou seja,  $\tilde{x}^\pm = \tilde{x}^-$ , e para  $a > a_{SN}$  ambos os pseudo-equilíbrios desaparecem em uma bifurcação de dobra ou nó-sela. A inclinação da linha reta  $ky - x = 0$  varia com o parâmetro  $k$ , e assim o ponto de tangência dupla  $\hat{x}(k)$  se move na elipse dada por

$$x - \omega y_r y - bx^2 + (\omega - a)y^2 = 0 \quad (15)$$

Para  $y > 0$ , onde o valor máximo para sua coordenada  $y$  é

$$Y_{\text{máx}} = \left[ 2b\omega y_r \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{a - \omega}{b\omega^2 y_r^2}} \right) \right]^{-1}$$

O ponto de tangência dupla  $\hat{x}(k)$  é capaz de colidir com o ponto de pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^-$  ou  $\tilde{x}^+$ , localizado na intersecção de  $y = y_r$  com esta elipse, já que sob tal condição a equação (15) coincide com a equação quadrática que define pseudo-equilíbrios. A partir disso, a transição de pseudo-equilíbrios entre regiões deslizantes pode ocorrer, levando a uma bifurcação TS. Consideramos

$$k_H^\pm = \frac{(\omega + 2b)\tilde{x}^\pm - 1}{2ay_r}$$

**Proposição 1.** *Seja  $a < a_{SN}$  e  $k \neq k_H^\pm$ . O ponto  $\tilde{x}^-$  é uma pseudo-sela quando está em  $\Sigma^e$  e um pseudo nó (ou pseudo-foco) quando está em  $\Sigma^s$ . O ponto  $\tilde{x}^+$  é uma pseudo-sela quando em  $\Sigma^s$  e um pseudo-nó (ou pseudo-foco) quando em  $\Sigma^e$ . Portanto,  $\tilde{x}^+$  é sempre um pseudo-equilíbrio instável enquanto  $\tilde{x}^-$  é um pseudo-equilíbrio estável sempre que usa-se  $k$ , tal que  $k > \tilde{x}^-/y_r$  e  $k > k_H^-$ .*

Pode-se classificar ainda a estabilidade do ponto de pseudo-equilíbrio com base no cálculo do determinante e do traço da matriz Jacobiana associada aos sistemas deslizantes planos equivalentes,  $Det(J_{as})$  e  $Tr(J_{as})$ , respectivamente. Com relação à dinâmica de deslizamento, três diferentes bifurcações de um parâmetro podem aparecer: o nó-sela de equilíbrio, a bifurcação de Hopf e a bifurcação transcritical.

Caso  $k \neq \omega y_r$  e  $k = 1/(2by_r)$  então em  $a = a_{SN}$  ocorre uma bifurcação nó-sela. Uma bifurcação de Hopf ocorre em  $\Sigma^s$  (resp.  $\Sigma^e$ ) para  $k = k_H^- > \tilde{x}^-/y_r$  (resp.  $k = k_H^+ < \tilde{x}^+/y_r$ ), uma vez que  $Tr(J_{as}) = 0$  e  $Det(J_{as}) > 0$ . Por fim, existem 2

casos para a bifurcação transcritical, considerando  $\omega - bk^2 \neq a < a_{SN}$ . Para o primeiro caso, o pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^-$  e ocorre em  $\tilde{x}^- = ky_r$ , enquanto o outro envolve  $\tilde{x}^+$  e ocorre em  $\tilde{x}^+ = ky_r$ , desde que o  $Tr(J_{as}) \neq 0$ .

**III-B1. A bifurcação TS:** O valor do parâmetro  $a$  pode mudar durante a operação do conversor boost, já que a carga representada pela impedância  $R$  pode variar. Assim, consideramos este parâmetro como o principal parâmetro de bifurcação. Ambos os pseudo-equilíbrios  $\tilde{x}^\pm$  e o ponto dobra-dobra  $\hat{x}$  têm suas coordenadas parametrizadas por  $a$ .

Considere  $b < b_{\text{máx}}$ , no qual

$$b_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 y_r^2} - \omega y_r}{2y_r}$$

$$b_{\text{máx}} = \frac{1}{2y_r \left( \sqrt{1 + \omega^2 y_r^2} + \omega y_r \right)} < \frac{1}{2\omega y_r^2} \quad (16)$$

de modo que podemos assegurar que  $1 - 4b(b + \omega)y_r^2 > 0$ . Introduzimos os valores  $k_1$  e  $k_2$ , tal que:

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}}{2by_r}$$

$$k_1 = \frac{2(b + \omega)y_r}{1 + \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}} > (b + \omega)y_r \quad (17)$$

$$k_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4b(b + \omega)y_r^2}}{2by_r} < \frac{1}{by_r} \quad (18)$$

Sendo,

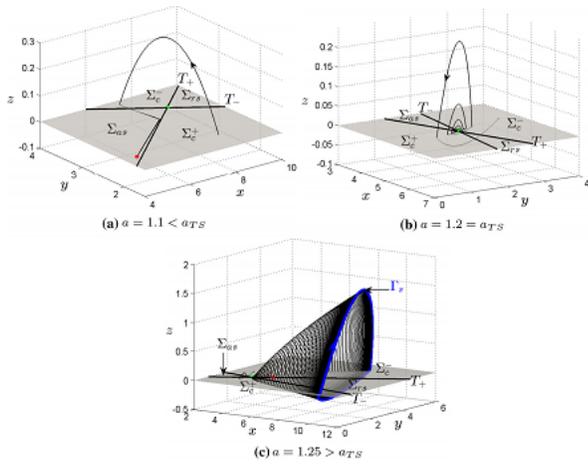
$$k_c = \frac{1}{2by_r}, \quad a_{TS}(k) = \frac{k(1bk y_r)}{y_r} \quad (19)$$

**Teorema 1.** *Considere o sistema (11), com  $b < b_{\text{máx}}$  e  $k \neq k_c$  de modo que  $k_1 < k < k_2$ , onde  $k_c, b_{\text{máx}}, k_1$  e  $k_2$  são definidos em (19), (16), (17) e (18). Para valores próximos à  $a_{TS}$ , definido em (19), as seguintes afirmações são válidas:*

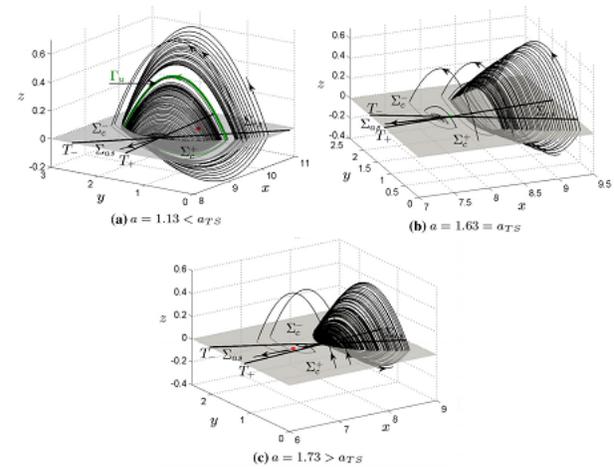
- Bifurcação TS supercrítica:** Se  $k_1 < k < k_c$  então para  $a = a_{TS}$  o sistema sofre uma bifurcação TS, de modo que existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $a_{TS} - \epsilon < a < a_{TS}$  o pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^- \in \Sigma^s$  e é um pseudo-nó estável, enquanto para  $a_{TS} < a < a_{TS} + \epsilon$  o pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^- \in \Sigma^e$  e é uma pseudo-sela.
- Bifurcação TS subcrítica:** Se  $k_c < k < k_2$  então para  $a = a_{TS}$  o sistema sofre uma bifurcação TS, de modo que existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $a_{TS} - \epsilon < a < a_{TS}$  o pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^+ \in \Sigma^e$  e é um pseudo-nó instável, enquanto para  $a_{TS} < a < a_{TS} + \epsilon$  o pseudo-equilíbrio  $\tilde{x}^+ \in \Sigma^s$  e é uma pseudo-sela.

#### IV. RESULTADOS E ANÁLISES

A análise numérica de órbitas periódicas bifurcadas se dá pelos resultados da simulação do conversor boost com SMC-washout modelado pelo sistema dinâmico (11), sendo todas as figuras retiradas de [1]. O caso supercrítico pode ser notado na Figura 4, sendo possível visualizar a bifurcação TS e ainda o surgimento de um CLC ( $\Gamma_s$ ) com dinâmica de nó estável.



**Figura 4:** Resultados da simulação do sistema (11), caso supercrítico. Os pontos verde e vermelho indicam o ponto TS e o pseudo equilíbrio  $\tilde{x}^-$ , respectivamente. Parâmetros de simulação:  $\omega = 1$ ,  $y_r = 2$ ,  $b = 0,01$  e  $k = 2,5$ .



**Figura 5:** Resultados da simulação do sistema (11), caso subcrítico. Os pontos verde e vermelho indicam o ponto TS e o pseudo equilíbrio  $\tilde{x}^+$ , respectivamente. Parâmetros de simulação:  $\omega = 0,6$ ,  $y_r = 1,33$ ,  $b = 0,08$  e  $k = 6$ .

Na Figura 5 apresenta-se o caso subcrítico onde é possível detectar o surgimento de a CLC ( $\Gamma_u$ ) com dinâmica de sela.

Para investigar a existência e estabilidade de um CLC, pode-se utilizar as equações de fechamento e a teoria dos mapas de primeiro retorno. Podemos reescrever o sistema (11) da seguinte maneira:

$$\dot{x} = \begin{cases} A^-x + b, & \text{if } z < 0 \\ A^+x + b, & \text{if } z > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Em que,

$$A^- = \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ -kb & \omega - a & -\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k - \omega y_r \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} -b & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 - kb & \omega - a - k & -\omega \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dado  $F^\pm(x, y, z) = A^\pm x + b$ , e sendo o sistema por partes linear, escreve-se o fluxo em cada zona como  $\Phi^\pm(\tau, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}^\pm + e^{A^\pm \tau} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}^\pm)$ . A seguir, assumimos a existência de um CLC que cruza  $\Sigma = z = 0$  nos dois pontos:

$$\mathbf{x}0 = \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}1 = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, as equações de fechamento são:

$$\mathbf{x}1 = \bar{\mathbf{x}}^+ + e^{A^+ \tau^+} (\mathbf{x}0 - \bar{\mathbf{x}}^+)$$

$$\mathbf{x}0 = \bar{\mathbf{x}}^- + e^{A^- \tau^-} (\mathbf{x}1 - \bar{\mathbf{x}}^-)$$

## V. CONCLUSÕES

Portanto, através deste projeto foi possível entender a teoria matemática que suporta a dinâmica de um conversor boost DC-DC controlado por um SMC, através da determinação de um

SDNS com duas zonas em um espaço tridimensional dividido por uma superfície plana. Ainda, foi possível analisar como os parâmetros e condições do circuito atuam para que seja possível obtermos uma bifurcação TS. Avaliou-se também que a bifurcação TS pode ocorrer de duas formas, a supercrítica e a subcrítica, sendo a primeira delas importante por estar diretamente associada ao ponto de operação desejado para o conversor boost, e entendendo que os dois casos não ocorrem ao mesmo tempo. Foi possível ainda notar que a bifurcação TS pode provocar o surgimento de um CLC, que pode se caracterizar como tipo nó estável ou sela.

## VI. BIBLIOGRAFIA

- R. Cristiano, E. Ponce, D. J. Pagano, M. Granzotto, *On the Teixeira singularity bifurcation in a DC-DC power electronic converter*, *Nonlinear Dynamics* **96**, 1243–1266 (2019).
- A. Colombo, M. di Bernardo, E. Fossas, M.R. Jeffrey, *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*, *Systems & Control Letters* **59**, 615–622 (2010).
- M. DI BERNARDO, C. J. BUDD, A. R. CHAMPNEYS, P. KOWALCZYK, *Piecewise-smooth Dynamical Systems – Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2008.
- M. DI BERNARDO, A. COLOMBO, E. FOSSAS, *Two-fold singularity in nonsmooth electrical systems*, *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2713–2716, 2011.
- FELIPE SALDANHA GARCIA, *Step-up, non-insulated, high-gain DC-DC converters*, Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010.
- FERNANDA CATARINA LOURENÇO GUEDES, *Conversor DC-DC em tecnologia CMOS para energy harvesting*, Dissertação de mestrado integrado em Engenharia Biomédica - Universidade do Minho, 2013.
- CALDAS, Mayara Duarte de Araujo. *Sistemas dinâmicos lineares por partes (em infinitas zonas): estabilidade estrutural e assintótica*. 2019. 1 recurso online (91 p.). Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.