Um Estudo sobre o Problema de Obstáculo e suas Aplicações

Palavras Chave: [Problema de Obstáculo][Existência][Unicidade de Soluções Fracas]

Autores:
Victor Laendle [UNICAMP]
Prof./ª Dr./ª João Vitor da Silva (orientador/a) [UNICAMP]

1 Introdução

Fisicamente, o problema de obstáculo consite em encontrar a posição de equilíbrio de uma membrana elástica, a qual pode ser pensada como o gráfico de uma função $x \mapsto u(x)$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com uma condição de bordo fixa $u(x) = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$ e sujeita a ação de uma força transversal $f(x)$ para $x \in \Omega$. Tal posição de equilíbrio resultará aquela a qual minimiza a energia potencial envolvida em tal processo.

Além daquela relacionado à força transversal, existe outro componente da energia potencial da membrana que é o trabalho necessário para esticá-la. Como consideramos um membrana perfeitamente elástica, este trabalho é proporcional à diferença de área entre a superfície esticada e a parte que não está deformada. A constante de proporcionalidade é a tensão, a qual tomaremos igual a 1. Portanto, a energia potencial da membrana é

$$\mathrm{E}(u) = \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} - 1 \right) dx + \int_\Omega f(x) u(x) dx.$$

Nesse ponto, se supomos que $|\nabla u(x)|$ é pequeno e dado que $\sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s + \cdots$, uma boa aproximação será

$$\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} \approx 1 + \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2.$$

Assim, substituindo a expressão acima na energia potencial, obtemos

$$\mathrm{E}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega f(x) u(x) dx.$$

2 Metodologia

Agora, para que tudo isso faça sentido, temos que ser capazes de falar sobre ∇u, mas não é necessário que u seja C^1 para que E esteja bem definida. Com isso, vamos procurar um minimizante da energia potencial no espaço de Sobolev $H^1(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : v, |\nabla v| \in L^2(\Omega)\}$.

Se a membrana estiver sobre um obstáculo definido como o gráfico de uma função $\varphi \in C^2(\Omega)$, o problema se reduz a minimizar o funcional:

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega fv dx$$

com $v \in \mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v \geq \varphi \quad \text{em} \quad \Omega\}$. Chamaremos tais funções de "admissíveis". Além disso, assumiremos que $g > \varphi$ em $\partial\Omega$ de modo que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

A seguir, faremos duas reduções equivalentes do problema de minimização que usaremos posteriormente para garantir a existência de uma solução.

Para a primeira redução, suponha que exista um minimizante u para o funcional $\mathcal{J}(v)$. Então, dado $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, a função $vu + \varepsilon\phi$ é admissível e, portanto, satisfaz

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(u + \varepsilon\phi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{J}(u+\varepsilon\phi) - \mathcal{J}(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\phi|^2 dx + \int_\Omega f(u+\varepsilon\phi)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \varepsilon\int_\Omega f\phi dx. \end{aligned}$$

Logo, se dividirmos por ε e o fizermos tender a 0^+, obtemos que

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_\Omega f\phi dx \quad \forall \ 0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dizemos então que uma solução para o problema de obstáculo satisfaz

$$\Delta u \leq f \quad \text{no sentido fraco em} \quad \Omega.$$

Com um raciocínio análogo, podemos mostrar para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com suporte no domínio $\{u > \varphi\}$ que o minimizante do funcional satisfaz

$$\Delta u \geq f \quad \text{no sentido fraco em} \quad \{u > \varphi\}.$$

Consequentemente, uma proposta para entendermos no sentido fraco o "problema do obstáculo" será:

$$\begin{cases} \Delta u \leq f & \text{no sentido fraco em} \quad \Omega \\ \Delta u \geq f & \text{no sentido fraco em} \quad \{u > \varphi\} \\ u \geq \varphi & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

com $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

Vamos definir então o que é uma solucão fraca para o operador Laplaciano.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular, diremos que $u \in H^1(\Omega)$ é dita uma solução fraca de

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f\phi dx \quad \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definimos o espaço de Sobolev (Hilbert) $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ dado por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to ; u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \forall \ 1 \leq i \leq N \right\}$$

Vamos agora fazer a segunda e última redução do problema. Pensemos no funcional $\mathcal{J}$ como a soma de uma forma bilinear simétrica e outra linear:

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(v,v) - \mathfrak{l}(v),$$

onde

$$\mathfrak{a}(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx \quad \text{e} \quad \mathfrak{l}(v) = -\int_\Omega f v dx$$

Assim, uma vez que $\mathcal{K}$ é um conjunto convexo, se u for um minimizante do funcional, teremos

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}((1-\varepsilon)u + \varepsilon v) \quad \forall \ \varepsilon \in (0,1) \quad \text{e} \quad w \in \mathcal{K}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{J}((1-\varepsilon)u + \varepsilon w) - \mathcal{J}(u) \\ &= \mathcal{J}(u + \varepsilon(w-u)) - \mathcal{J}(u) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u+\varepsilon(w-u), u+\varepsilon(w-u)) - \mathfrak{l}(u+\varepsilon(w-u)) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u,u) + \mathfrak{l}(u) \\ &= \tfrac{\varepsilon^2}{2}\mathfrak{a}(w-u, w-u) + \varepsilon\mathfrak{a}(u, w-u) - \varepsilon\mathfrak{l}(w-u). \end{aligned}$$

Portanto, se dividirmos por ε e fizermos com que tenda a 0^+, obtemos que o minimizante $u \in \mathcal{K}$ deve satisfazer a seguinte desigualdade variacional:

$$0 \leq \mathfrak{a}(u, w-u) - \mathfrak{l}(w-u) \quad \forall \ w \in \mathcal{K},$$

a qual é equivalente à primeira formulação que fizemos do problema. E isto nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 0.1 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $g \in H^1(\Omega)$ e $\varphi \in L^2(\Omega)$. Dado $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única $u \in \mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v \geq \varphi \quad \text{em} \quad \Omega\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) dx \geq \int_\Omega f.(v-u) dx \quad \forall \ v \in \mathcal{K}. \qquad (A1.1.6)$$

Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C\{||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{H^1(\Omega)}\}.$$

3 Exemplos

Para exemplificar tudo isso, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1 Dado $\Omega =]-1,1[$, $g = 0$, $\phi = -\frac{1}{18}$ e $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad |x| > \frac{1}{4} \\ 1 - 32x^2 & \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ Encontre u que satisfaz $-\Delta u = f$ e $-\Delta u \geq f$.

Considere os seguintes casos:

Caso 1: Seja $\Gamma = \pm\frac{2}{3}$ e o conjunto de coincidência dado por $\Omega^0 =]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$, e a função u definida como:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} \quad \text{se} \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

satisfaz a condição $-\Delta u = f$. Mas não $-\Delta u \geq f$

Caso 2: Seja $\Gamma = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ e o conjunto de coincidência dado por $\Omega^0 =]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, e a função u, definida como:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} \quad \text{se} \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})^2 & \text{se} \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{32} + \frac{8x^2}{3}(x^2 - \frac{3}{16}) & \text{se} \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} \quad \text{se} \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Satisfaz as condições estabelecidas. Como satisfaz $-\Delta u \geq f$, pelo Teorema 0.1, temos a garantia da Unicidade da Solução no Problema do Obstáculo. Este exemplo e outros para o leitor, é possível encontrar em [2]

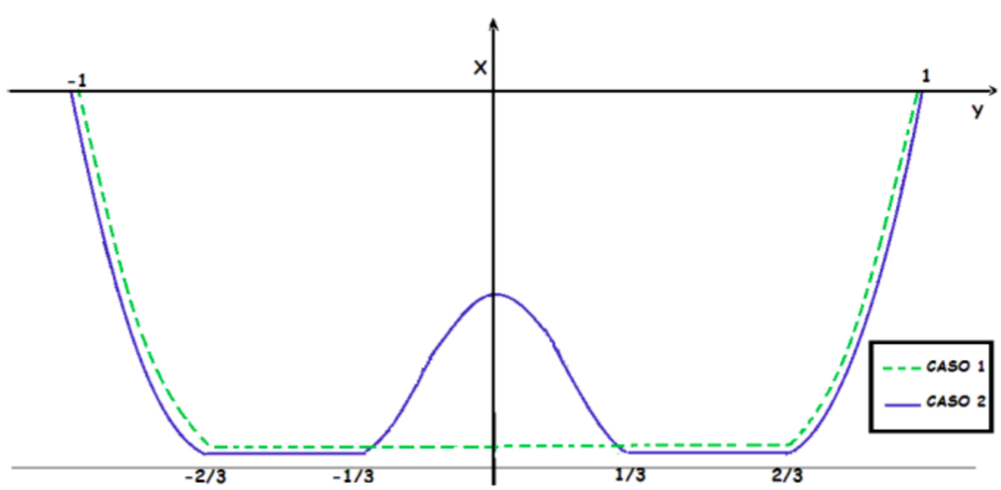

Figura 3: Gráfico das funções do Exemplo 1.1. **Fonte:** Elliot, C. M. e Ockendon, J.R.; 1982

4 Conclusões

O Problema de Obstáculos é muito importante e pode ser utilizado em diversas áreas do conhecimento, a saber, Engenharia, Física-Matemática, Matemática de Finanças, Probabilidade e afins. Isto devido a riqueza de possibilidades para novas abordagens que a teoria de análise geométrica em EDPs e problemas de fronteira livre nos oferece. Dedicamo-nos a a trabalhar com a definição, proposição, demonstração e aplicação de um teorema para o caso geral de tal problema.

O Problema de obstáculos está relacionado com a aproximação da posição de equilibrio e minimização de um funcional para que haja uma diminuição da Energia Potencial envolvida em tal processo.

Os objetivos deste trabalho foram revisar conceitos de álgebra linear, discutir a teoria do problema de obstáculos e verificar a existência, unicidade e eficiência da solução do problema.

Referências

[1] Gonçalves, Ana Raquel. *Resolução Numérica de Problemas de Obstáculo com aplicações à Matemática Financeira*. Dissertação de Mestrado. Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2018

[2] Lexis, Daniel. *Inequações variacionais e aplicações em problemas tipo obstáculo com resolução numérica via complementariedader*. UFJF, 2013.

[3] Rodrigues, J.F. Obstacle problems in mathematical physics. North-Holland Mathematics Stu- dies, 134. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 114. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. xvi+352 pp. ISBN: 0-444-70187-7.

[4] Wolanski,N. *Introdución a los problemas de frontera libre.Cursos y Seminaros de Matemática - Serie B. Fascículo 2*. 2007 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.