

COLAPSO DE GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES COM PERFIS DE CURVATURA DADOS PROBABILISTICAMENTE

Palavras-chave: Geodésica, Superfície, Tempo de colapso

Autores:

Flávia Moura Siqueira [IMECC, Unicamp]
Prof. Ricardo Antônio Mosna (orientador) [IMECC, Unicamp]

1 Introdução

Neste projeto foi estudado como se comportam feixes de geodésicas inicialmente paralelas em superfícies geradas aleatoriamente com curvatura. Para isso foram feitas simulações para avaliar como os tempos de colapso variam mudando o ponto de início da geodésica.

2 Metodologia

Com auxílio do *software* Mathematica, foram geradas superfícies com curvatura probabilística usando a Equação 3, com base em [3]. Em cada superfície foram calculadas as geodésicas usando a Equação 1, mais detalhes em [2], que começavam no ponto $(x_0, -2)$, com x_0 variando entre -2 e 2 inicialmente paralelas.

Por motivos de custo computacional, para a simulação os pontos iniciais de geodésica foram $-2, -1.5, -0.5, 0, 0.5, 1.5$ e 2 . Então, para cada ponto inicial foram geradas 300 superfícies e com a Equação 2, a Equação 2D de Raychaudhuri, foi calculado o tempo de colapso. Caso o tempo resultante fosse igual ao limite de integração da Equação, então não houve colapso.

$$\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D^2 \xi^\kappa}{dt^2} + R_{\alpha\beta\gamma}^\kappa u^\alpha \xi^\beta u^\gamma = 0,$$

com ξ sendo o vetor de afastamento das geodésicas.

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta^2 + \frac{R}{2} = 0, \quad (2)$$

sendo que σ é o módulo do vetor ξ e $\theta = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$.

$$f(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N a(m, n) \cos(2\pi(mx + ny) + \phi(m, n)). \quad (3)$$

Como não são todas as geodésicas que colapsam e a informação da ocorrência de colapso está disponível é possível usar técnicas de análise de sobrevivência considerando as que não colapsam

como dado censurado. Para a análise de sobrevivência foi usado o Estimador de Kaplan-Meier, mais detalhes podem ser vistos em [1], que é calculado como mostrado pela Equação 4.

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right). \quad (4)$$

Ele estima a curva de sobrevivência dos dados, que é definida como a probabilidade de uma observação sobreviver ao tempo t , ou seja, $S(t) = P(T \geq t)$.

3 Resultados e discussão

Na Figura 1 podemos ver o resultado de uma das simulações feitas, em que as linhas azuis são as geodésicas.

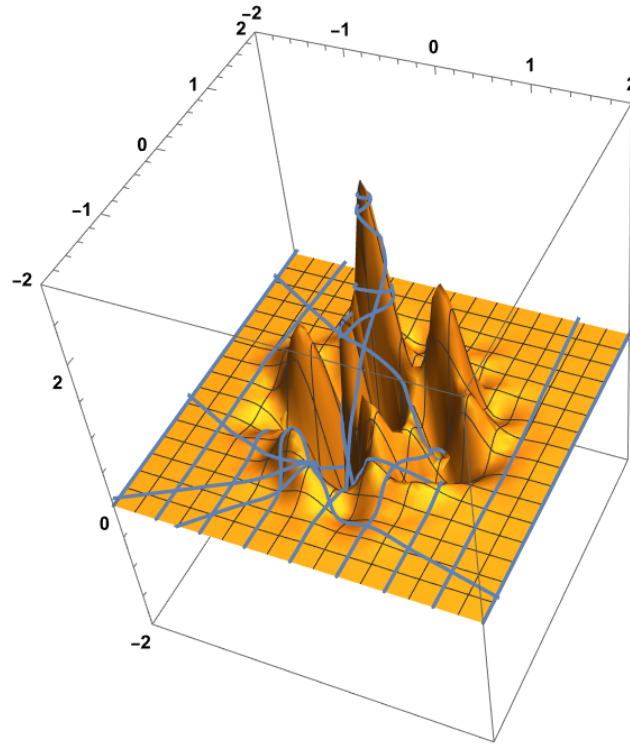


Figura 1: Geodésicas (linhas azuis) em superfície gerada aleatoriamente.

Na Figura 2 podemos ver a curva de sobrevivência $S(t)$ estimada usando o método de Kaplan-Meier. Na esquerda podemos ver um comportamento dicotômico, com as geodésicas que começam mais próximas de 0 apresentando menor sobrevivência, e as mais distantes, maior sobrevivência, com aproximadamente 60% delas não entrando em colapso. Esse comportamento foi resumido no gráfico da direita, em que foram criados os grupos 0 e 1, com 0 sendo as geodésicas que começam entre -1.5 e 1.5 e 1 as fora desse intervalo.

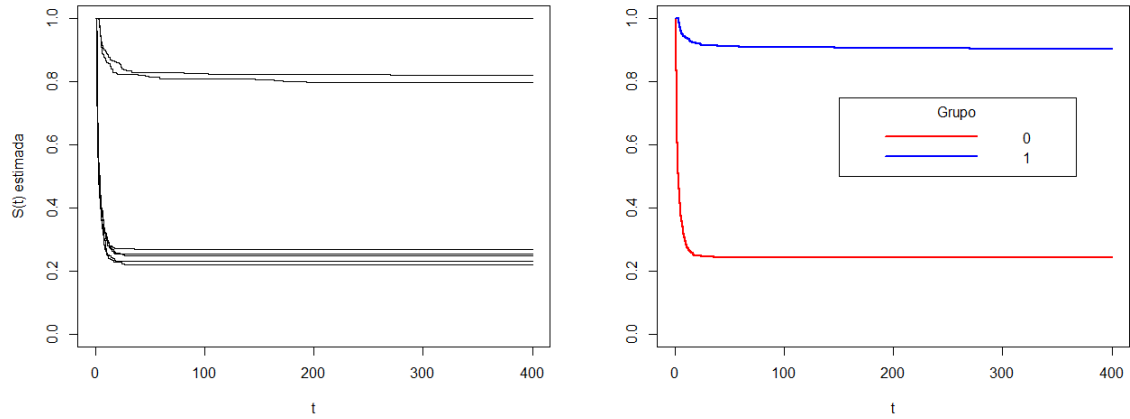


Figura 2: Esquerda: $S(t)$ estimada usando Kaplan-Meier com uso x_0 . Direita: $S(t)$ estimada usando Kaplan-Meier com os grupos criados.

A diferença entre os grupos também foi atestada estatisticamente com o teste de Mantel-Haenszel, resultando em p-valor inferior a $2 \cdot 10^{-6}$. No teste de Mantel-Haenszel (ou teste Logrank), a hipótese nula é de que não há diferença entre as curvas, então a nível de significância de 5%, essa hipótese pode ser rejeitada. Com isso, podemos concluir que o ponto x_0 inicial do feixe de geodésicas têm influência significativa na ocorrência ou não de colapso.

Utilizando outra abordagem, e usando apenas os tempos de colapso das geodésicas que de fato colapsaram, foi encontrada uma distribuição que representa os dados de forma aceitável, vide Figura 3, a *Skew t* Tipo 2. Para validar esse resultado foi usado o Teste de Kolmogorov-Smirnoff, que resultou em p-valor = 0.08. Neste teste, a hipótese nula é de que a amostra segue a dita distribuição, e a nível de significância de 5% essa hipótese não pôde ser rejeitada.

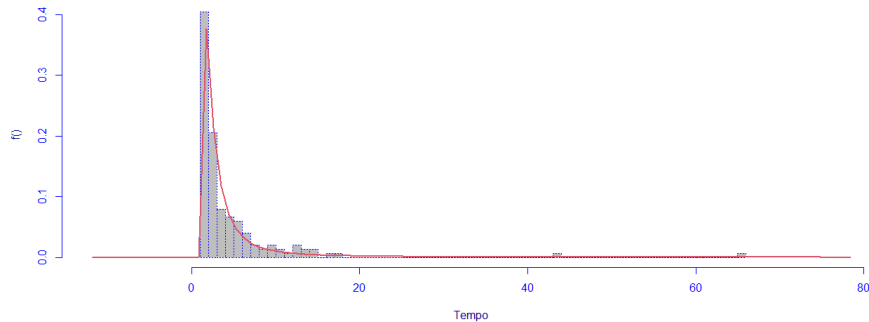


Figura 3: Em cinza o histograma dos tempos de colapso e em vermelho a distribuição ST2 com os parâmetros estimados.

Referências

- [1] Enrico Antônio Colosimo and Suely Ruiz Giolo. *Análise de Sobrevida Aplicada*. Blucher, 2006.
- [2] Markus Deserno. Notes on Differential Geometry with special emphasis on surfaces in $\mathbb{R}^3$. https://www.cmu.edu/biolphys/deserno/pdf/diff_geom.pdf.
- [3] Bjorn Sjodin. How to Generate Random Surfaces in COMSOL Multiphysics®. <https://www.comsol.com/blogs/how-to-generate-random-surfaces-in-comsol-multiphysics/>.