# O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON E O TEOREMA DE BARBIER

*Estudante:*
Lucas Vieira Santa Maria
IMECC- Licenciatura em Matemática

*Orientador:*
Prof. Dr. Gabriel Ponce
Departamento de Matemática - IMECC

**Palavras-Chave:** Agulha de Buffon, Probabilidade e Geometria Diferencial

## 1. INTRODUÇÃO E OBJETOS DE ESTUDO

O objetivo principal desta pesquisa é investigar tópicos introdutórios de duas grandes áreas da matemática – a probabilidade geométrica e a geometria diferencial. O estudo dessas áreas é, respectivamente, motivado por dois problemas clássicos na história matemática, sendo o primeiro conhecido como o “problema da agulha de Buffon” e o segundo como o “Teorema de Barbier”. Ambos desempenharam importante papel no desenvolvimento da matemática e, mais precisamente, nas áreas mencionadas.

George-Louis Leclerc, matemático e naturalista francês do século XVIII, mais conhecido como Conde de Buffon, submete, em 1733, à *Académie Royale des Sciences* o seguinte problema:

**Problema da Agulha de Buffon:** *Qual a probabilidade de que uma agulha, lançada de maneira despretensiosa, repouse sobre uma das retas paralelas que compõem um assoalho de madeira?*

A relevância dada a esse problema se deve ao fato de que sua resolução representa um dos primeiros registros daquilo que viria a se tornar a teoria da probabilidade geométrica – área de estudo que relaciona o cálculo de probabilidades com conceitos fundamentais da geometria, tais como: comprimento, área e volume.

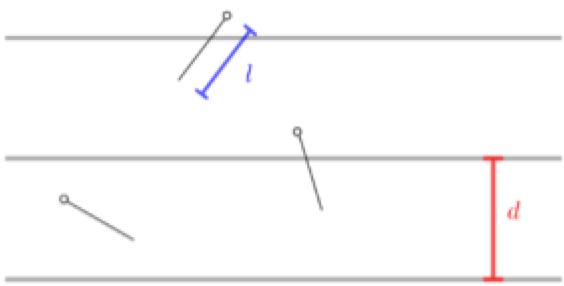


*Figura 1 – Agulhas num assoalho de madeira*
*Autoria própria*

Tal conquista consolida o Conde de Buffon como um precursor nesse ramo da matemática. Mas, para além disso, com o problema por ele proposto, também foi descoberta uma maneira experimental de se obter aproximações do número irracional π, fazendo com que este problema seja aceito como uma das primeiras aplicações do Método de Monte Carlo, que é caracterizado pela repetição de um evento aleatório (como jogar agulhas em um assoalho de madeira) para se obter um resultado computacional (como uma aproximação de π).

Após a publicação de Buffon, muitos matemáticos desenvolveram suas próprias versões do problema da agulha. Uma das ramificações mais interessantes do problema foi gerada em 1969 quando a matemática J. F. Ramaley se questionou sobre o que aconteceria ao se “dobrar a agulha”. Ou seja, ao invés de se trabalhar com uma agulha, modelada por um segmento de reta, se trabalharia com uma curva qualquer. Assim, foi formulado o seguinte problema:

**Problema do Noodle de Buffon:** *Qual é o número esperado de cruzamentos entre um “noodle” e as paralelas que formam um assoalho de madeira ao lançá-lo de maneira despretensiosa sobre o assoalho?*

O termo *noodle* é utilizado pois, além de se assemelhar sonoramente à *needle* (agulha em inglês) refere-se ao que seria um fio de macarrão cozido, ilustrando bem a ideia de uma curva de comprimento finito e formato qualquer.

Curiosamente, em 1860, o matemático Joseph-Émile Barbier já havia pensado em uma versão parecida desse que se tornaria o problema do Noodle de Buffon. A diferença foi que suas curvas eram bem particulares, mais especificamente, sua versão se focou nas **curvas de largura constante**. Seu estudo sobre tais objetos compôs parte fundamental na demonstração do teorema que ele formulará, hoje conhecido como:

**Teorema de Barbier:** *Toda curva de largura constante, e igual à* L, *tem perímetro igual à* $\pi \cdot$ L

Apesar das curvas de largura constante não serem objetos amplamente conhecidos, elas possuem diversas aplicabilidades e propriedades interessantes. Diga-se de passagem, o círculo, tão presente na história da humanidade, faz parte dessa classificação particular de curvas.

Para definir esses objetos formalmente, mas ainda de forma resumida, é necessário introduzir alguns conceitos:

Dada uma curva fechada e convexa *C*, diremos que sua reta suporte na direção *n* é dada pela reta perpendicular à *n* que tem a propriedade de deixar a curva *C* completamente em um de seus lados.

Já a largura de *C* é dada pela distância entre um par de retas suportes na mesma direção. Na figura ao lado, a largura da curva na direção *n* é representada por L.

Por fim, as curvas de largura constante são aquelas em que a largura permanece constante independentemente da escolha da direção *n*.

Com isso, é intuitivo concluir que, de fato, o círculo é uma curva de largura constante. Contudo, como já foi dito, as outras curvas deste tipo não são tão conhecidas. Portanto, cabe a seguinte provocação:

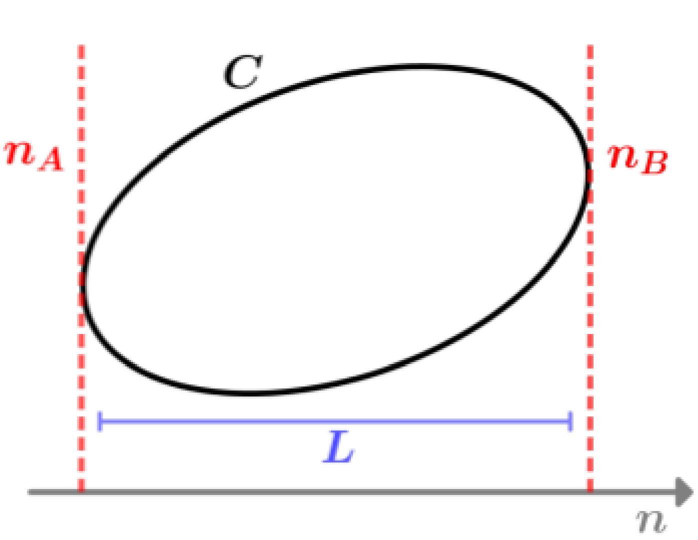

*Figura 2 – Definição curvas de largura constante*
*Autoria própria*

*Quais são todas as curvas de largura constante?*

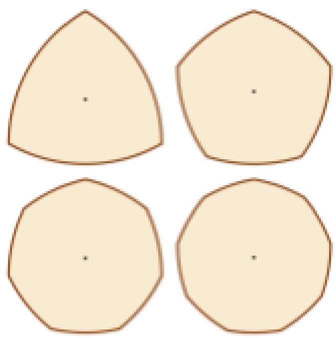
*Figura 3 – Exemplos de curvas de largura constante*
https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_polygon

Retomando ao Teorema de Barbier, coube ao aluno compreender e reproduzir duas de suas diversas possibilidades de demonstração. A primeira apresentada na pesquisa segue os passos de Joseph e utiliza o Problema do Noodle de Buffon. Já na segunda, o foco está em demonstrar utilizando conceitos e resultados da geometria diferencial.

E, sem muitas surpresas, os outros resultados mencionados também foram objetos de estudo do aluno. Com isso, me refiro tanto ao problema da agulha de Buffon e o método para se aproximar $\pi$ o utilizando, quanto a provocação final.

## 2. METODOLOGIA

Sendo um projeto de pesquisa de cunho principalmente teórico, o método de pesquisa adotado não fugiu ao convencional e pode ser descrito por duas principais tarefas: o estudo independente e a realização de reuniões com o orientador.

Por um lado, a fim de conhecer, compreender e resolver as questões propostas no projeto, o aluno estuda de forma independente não só a seleta bibliográfica principal mas também diversas outras, seja pelos motivos já mencionados ou pela simples consulta teórica matemática e, por outro lado, são realizados seminários semanais durante as reuniões com o orientador.

Tais seminários são importantes para que o orientador possa estar ciente do andamento e progressão da pesquisa durante a semana em questão. Assim, o orientador está habilitado a direcionar o aluno às melhores ideias para a pesquisa e também a o ajudar quanto às pequenas dúvidas que surgem no estudo semanal.

## 3. RESULTADOS E CONCLUSÕES

O objetivo principal desse projeto é fornecer ao aluno uma formação complementar em matemática que envolve objetos de estudo relevantes tanto para a matemática pura quanto para a básica e que, portanto, podem ser aplicados no contexto do ensino básico.

Dito isso, pode se afirmar que o projeto de pesquisa tem alcançado seus objetivos e resultados esperados até então, já que, através da metodologia do projeto, nota-se aparente melhora acadêmica no aluno, seja pelo conhecimento matemático extracurricular adquirido ou então pela maturidade profissional desenvolvida ao se preparar e apresentar seminários matemáticos.

Ainda cumprindo seus objetivos, a pesquisa também proporcionou ao aluno a experiência de elaborar e lecionar uma aula voltada ao ensino médio sobre probabilidade utilizando o “Jogo dos Discos”. Não coincidentemente, este jogo é formulado utilizando como base um problema também proposto pelo Conde de Buffon e que, por ser de 1732, antecede o problema da agulha.

Para além do ganho de experiência acadêmica e educacional planejada, cito aqui também os resultados matemáticos concretos que (em sua maioria) foram estabelecidos antes do início dos trabalhos e que, por sinal, foram de fato alcançados pelo aluno:

- **Primeiro semestre de atividades:** Conhecer e produzir uma breve contextualização histórica sobre o problema da agulha de Buffon e de seu autor; Estudar tópicos elementares nas teorias da probabilidade e da probabilidade geométrica; Compreender e produzir a demonstração do problema da agulha de Buffon; Investigar as verdades e os mitos por trás da história da aproximação de $\pi$ pelo problema da agulha; Reproduzir teoricamente tal aproximação e avaliar sua eficácia; Investigar o histórico de generalizações do problema da agulha; Compreender e reproduzir a generalização conhecida como o problema do noodle de Buffon.
- **Segundo semestre de atividades:** Introdução à conceitos e definições elementares na teoria da geometria diferencial; Investigar as curvas de largura constante e os polígonos de Reuleaux (definições, propriedades, teoremas importantes, como construir e quais são suas aplicabilidades no mundo real); Estudo focalizado no *Triângulo de Reuleaux*, que é um dos “corpos de largura constante” mais famosos; Compreender e reproduzir o Teorema de Barbier.

Todo esse estudo realizado pelo aluno será sumarizado em uma produção pessoal e formal, que será feita com o auxílio de seu orientador e que constará no relatório final da pesquisa.

O aluno avalia seus resultados durante a pesquisa como satisfatórios, porém não extraordinários.Visto que, por um lado, superaram o projeto inicial em certas direções, como no aprofundamento histórico dos temas e na produção de um plano de aula, mas, pelo outro lado, deixaram a desejar em outras direções, como por exemplo na produção de um software que realizasse a aproximação de $\pi$.

Acredito que isso se deve ao fato de que o projeto da pesquisa não foi o único norte a guiar os estudos ao longo dos meses. Digo isso pois, como sou aluno do curso de Licenciatura em matemática pela UNICAMP, cursei, ao longo dos dois semestres da iniciação científica, as disciplinas MA752, História da Matemática e MA901, Estágio Supervisionado I, o que, claramente, enviesou de forma positiva meus estudos extracurriculares, dado que os temas aprofundados e estudados, além de serem do gosto pessoal do aluno, se relacionam diretamente com os objetivos estabelecidos ao início referentes à educação matemática.

## 4. BIBLIOGRAFIA


BEHRENDS, Ehrhard e BUESCU, Jorge. **Terá Buffon realmente lançado agulhas?** *Boletim da SPM*, Vol. 71, pp. 123-132. Dezembro, 2014.

LINS, Lauro Didier. **Agulha de Buffon**. Disponível em http://www.cin.ufpe.br/~ldl/buffon.pdf. Maio, 2004.

RAMALEY, J. F. **Buffon's Noodle Problem**. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 76, No. 8, pp. 916-918. Outubro, 1969.

KNAUER, Hedwig Gertrud. **Curves of constant width and Δ-curves**. Tese, California State University, Northridge. Junho, 1978.