



O efeito memória gravitacional em ondas planas impulsivas

Palavras- chave: Relatividade Geral, Efeito memória, Ondas gravitacionais.

Autores:

Lais Almeida Wendland - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (orientador) - Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP)

1 Introdução

Este projeto tem como objetivo analisar como um conjunto de partículas teste é alterado após a passagem de uma onda gravitacional plana impulsiva. Verificaremos, por exemplo, se há efeito memória gravitacional. De acordo com esse efeito, a passagem de uma onda gravitacional em um sistema físico acarreta uma mudança entre o estado inicial e final desse sistema.

Consequentemente, para estudar o efeito memória não-linear envolvendo soluções exatas de ondas planas, utilizaremos as soluções nas coordenadas de Brinkmann e nas coordenadas de Rosen. Logo, a fim de definir essas coordenadas consideramos uma onda gravitacional plana exata que se propaga na direção z , sendo $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - t)$ e $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z)$ ¹, definimos as coordenadas de Brinkmann da seguinte forma

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + 2dUdV + K(U)_{ij}x^i(U)x^j(U)dU^2. \quad (1)$$

Nesse projeto consideramos uma onda linearmente polarizada do tipo "+", logo, para as coordenadas de Brinkmann, $K(U)_{ij} = \frac{1}{2}A(U)(X^2 - Y^2)$ em que $A(U)$ é uma função arbitrária. Mas como trataremos de ondas gravitacionais impulsivas, $A(U)$ terá a forma $A(U) = \alpha\delta(U)$, sendo α uma constante. Assim, a equação (1) torna-se $ds^2 = dX^2 + dY^2 + 2dUdV + \frac{\alpha}{2}\delta(U)(X^2 - Y^2)dU^2$. Tal solução nos permite pensar na onda gravitacional como uma única frente de onda que se desloca na velocidade da luz.

Já as soluções nas coordenadas de Rosen têm a forma

$$ds^2 = 2dudv + f(u)^2dx^2 + g(u)^2dy^2. \quad (2)$$

Para as coordenadas de Rosen, $f(u)$ e $g(u)$ têm que obedecer a expressão $\frac{1}{2}A(U) = \frac{f''(u)}{f} = -\frac{g''(u)}{g}$ ³.

2 Metodologia

Para podermos definir como se comportam as partículas teste após a passagem de uma onda gravitacional utilizamos o fato que partículas livres no espaço-tempo seguem geodésicas. Logo, podemos calcular as equações da geodésica para as coordenadas Brinkmann e Rosen citadas acima.

Assim sendo, das soluções nas coordenadas de Rosen (2), uma possível expressão para a geodésica de uma partícula livre inicialmente em repouso é descrita nas expressões (3), em que x_0 e y_0 são as condições iniciais e a e b são constantes; além disso, λ é o parâmetro afim utilizado. Observa-se que para partículas inicialmente em repouso, nas coordenadas de Rosen, mesmo após passar pela onda gravitacional as partículas continuam

¹Usaremos a convenção $c=1$.

²Faremos distinção das coordenadas pelo uso da letra maiúscula, no caso das coordenadas de Brinkmann e minúscula para as coordenadas de Rosen.

³A notação utilizada é $\frac{df}{du} = f'(u)$.

em repouso. Mostraremos que isso não está correto na próxima seção e advém do fato de que as coordenadas de Rosen possuem singularidades de coordenada.

$$\begin{cases} x(u) = x_0, \\ y(u) = y_0, \\ U = \lambda, \\ v(u) = a\lambda + b. \end{cases} \quad (3)$$

Já para encontrar as geodésicas nas coordenadas de Brinkmann podemos usar as relações entre as soluções nas coordenadas Brinkmann e Rosen, mostradas em (4), e as equações da geodésica nas coordenadas Rosen em (3), o que resulta nas equações (5),(6) e (7). Assim, pela métrica de Brinkmann não possuir singularidades estudaremos o comportamento das partículas através dessas coordenadas. Solucionando as equações (5),(6) e (7), obtemos $X(U), Y(U), V(U)$, e assim determina-se as velocidades e a energia cinética de partículas teste nessas coordenadas.

$$\begin{cases} X(u) = f(u)x(u), \\ Y(u) = g(u)y(u), \\ U = u, \\ V(u) = v(u) - \frac{1}{2}x(u)^2 f(u)f'(u) - \frac{1}{2}y(u)^2 g(u)g'(u). \end{cases} \quad (4)$$

$$X''(U) = \frac{1}{2}A(U)X(U), \quad (5)$$

$$Y''(U) = -\frac{1}{2}A(U)Y(U), \quad (6)$$

$$V''(U) + \frac{1}{4}A'(U)(X(U)^2 - Y(U)^2) + A(U)(X(U)X'(U) - Y(U)Y'(U)) = 0. \quad (7)$$

As equações (5),(6) e (7) podem ser resolvidas analiticamente no caso em que a partícula encontra-se inicialmente em repouso e também numericamente. Para isso fizemos uso do software Wolfram Mathematica.

Analiticamente, para uma partícula livre em que há passagem de uma onda gravitacional da forma $ds^2 = dX^2 + dY^2 + 2dUdV + \frac{1}{2}\alpha\delta(U)(X^2 - Y^2)dU^2$, ou seja, uma onda impulsiva que é "sentida" pela partícula em $U=0$, podemos resolver a equação (5) a partir da equação (8):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} X''(U)dU = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\alpha}{2} \delta(U)X(U)dU : \quad (8)$$

O que resulta na equação 9:

$$X'(0^+) - X'(0^-) = \frac{\alpha}{2}X(0). \quad (9)$$

Logo, com a partícula inicialmente em repouso, temos:

$$X(U) = \begin{cases} k, & \text{se } U < 0, \\ \frac{\alpha}{2}kU + k, & \text{se } U > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Fazendo o mesmo procedimento com a equação (6) para uma partícula inicialmente em repouso, obtemos:

$$Y(U) = \begin{cases} \beta, & \text{se } U < 0, \\ -\frac{\alpha}{2}\beta U + \beta, & \text{se } U > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Já na solução numérica, devido às limitações do software, para resolver a equação (7) torna-se necessário aproximar a função Delta de Dirac por $\delta(U) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}$, assim, utilizamos o perfil de onda gaussiano $A(U) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}$ manipulando os possíveis valores de σ de forma a deixá-lo pequeno suficiente para que seja possível fazer um comparativo com uma onda plana impulsiva.

3 Resultados e Discussão

Primeiramente, analisamos como um conjunto de partículas se comporta nos eixos X e Y com a passagem de ondas com perfis gaussianos e perfil de uma onda plana impulsiva, utilizamos as condições iniciais $X(U_i) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, U_i = -5$ e $Y(U_i) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, U_i = -5$ para uma partícula inicialmente em repouso. Abaixo estão expostos os resultados tanto diminuindo sigma, quanto no caso em que $A(U) = \delta(U)$ de (1), como pode ser visto nas Figuras 1 e 2 para o eixo X e Figuras 3 e 4 para o eixo Y.

Vemos o seguinte padrão conforme a gaussiana se aproxima de uma função delta de Dirac. Após a passagem da onda, tanto para $X(U)$ quanto para $Y(U)$, há uma mudança brusca na trajetória das partículas em $U = 0$. As partículas que estavam paralelamente distantes entre si, após a passagem de uma onda impulsiva, no eixo Y focalizam-se e após se afastam, mas no eixo X afastam-se continuamente a partir de $U = 0$, exceto no caso em que das equações (10) e (11), $k = 0$ e $\beta = 0$, que corresponde ao caso em que $X^2 = Y^2$. Além disso, das equações (10) e (11) vemos que partículas inicialmente paradas adquirem velocidade após a passagem da onda gravitacional. Portanto, observa-se o efeito memória gravitacional para as trajetórias das partículas.

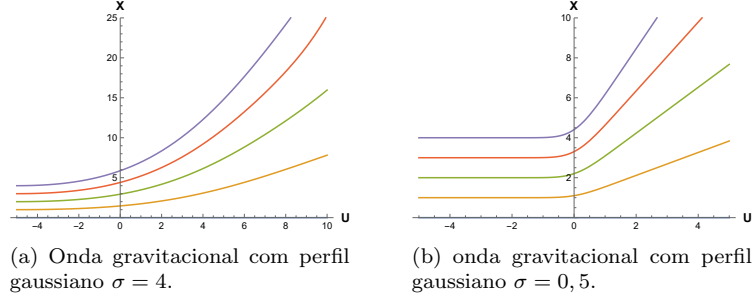


Figura 1: $X(U)$ nas Coordenadas de Brinkmann para partículas inicialmente em repouso, onda gravitacional com perfil gaussiano $\sigma = 4$ e $\sigma = 0,5$ e condições iniciais $X(-5) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

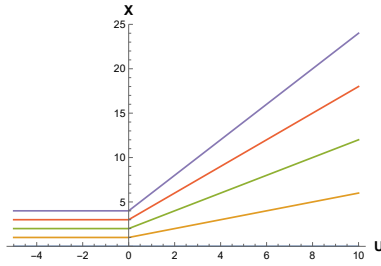


Figura 2: $X(U)$ nas Coordenadas de Brinkmann para partículas inicialmente em repouso, onda gravitacional impulsiva, ou seja, com $A(U) = \delta(U)$ e condições iniciais $X(-5) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $U_i < 0$.

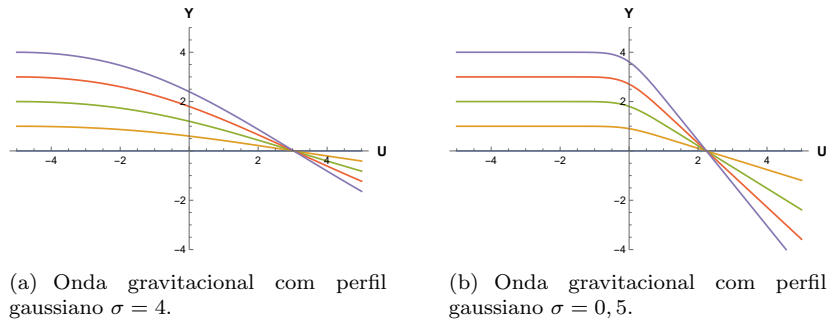


Figura 3: $Y(U)$ nas Coordenadas de Brinkmann para partículas inicialmente em repouso, onda gravitacional com perfil gaussiano $\sigma = 4$ e $\sigma = 0,5$ e condições iniciais $Y(U_i) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $U_i < 0$.

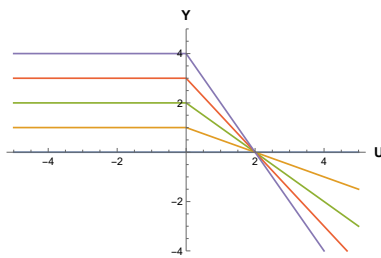


Figura 4: $Y(U)$ nas Coordenadas de Brinkmann para partículas inicialmente em repouso, onda gravitacional impulsiva, ou seja, com $A(U) = \delta(U)$ e condições iniciais $Y(U_i) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $U_i < 0$.

Como mostrado anteriormente, segundo as coordenadas de Rosen as partículas estão em repouso após a passagem da onda, mas considerando as coordenadas de Brinkmann não é isso que ocorre. Isso pode ser explicado pelo fato de que as coordenadas de Rosen apresentam uma singularidade em $U > 0$, pois como observa-se na Figura 4 as partículas são focalizadas em $Y(U) = 0$ e das relações entre as coordenadas de Brinkmann e Rosen temos que $Y(u) = g(u)y(u)$. Assim necessariamente $g(U) = 0$, o que é uma singularidade de coordenadas na métrica de Rosen.

Ademais, questionamos se a partir dos resultados de $X(U)$ nas figuras acima seria possível após a passagem de uma onda gravitacional plana impulsiva aplicarmos outra de forma que as partículas ficassem novamente paralelas entre si em $X(U)$. Assim sendo, com $A(U) = (\delta(U) - \alpha\delta(U - a))$, $a > 0$, nas condições em que $a = 2(\frac{1}{\alpha} - 1)$, $1 < \alpha < 0$ encontramos que as partículas de fato voltam a ficar paralelas entre si, mas apenas no eixo X. Entretanto, elas obtêm uma separação relativa maior que no início. Assim, utilizando $\alpha = 0,5$ em $a = 2(\frac{1}{\alpha} - 1)$ vemos que, de fato, as partículas voltam ao repouso no eixo X, Figura 5.

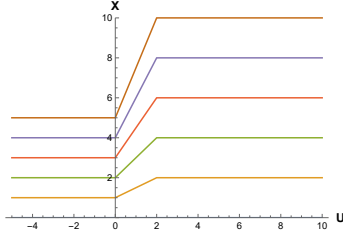


Figura 5: $X(U)$ para onda gravitacional com perfil $A(U) = (\delta(U) - \alpha\delta(U - a))$, $a = 2$, $\alpha = 0,5$.

Após isso, analisamos como uma onda plana impulsiva pode alterar a energia cinética de um sistema composto por uma partícula teste livre. Para tal, fizemos uso da solução numérica das equações (5), (6), (7) utilizando o perfil de onda gaussiano. Obtivemos, para diferentes condições iniciais, a trajetória de uma partícula em função de U e por conseguinte as velocidades em função de t , bem como a energia cinética por unidade de massa do sistema em função do tempo t , ou seja, $K = \frac{1}{2}[V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2]$. Por exemplo, na condição inicial $X(-5) = 5$, $X'(-5) = 0$, $Y(-5) = 0$, $Y'(-5) = 0$, $V(-5) = 5$, $V'(-5) = -1$, como pode ser observado nas Figuras 6 e 7, conforme diminui-se σ vemos que as velocidades V_X e V_Y mudam mais rapidamente perto de $t = 0$ como é esperado ao aproximar o perfil gaussiano de uma delta de Dirac. O mesmo pode-se dizer sobre a energia cinética. Isso pode ser visto na Figura 8.

Constata-se também que utilizando outras condições iniciais obtemos resultados diferentes. Por exemplo, se $X(-5) = 5$, $X'(-5) = 0,2$, $Y(-5) = 5$, $Y'(-5) = 0$, $V(-5) = 0$, $V'(-5) = 0$ vemos que a energia cinética após a passagem da onda é maior que a inicial, Figura 9. Já para a condição inicial $X(-5) = 5$, $X'(-5) = 0$, $Y(-5) = 5$, $Y'(-5) = 0$, $V(-5) = 0$, $V'(-5) = 0$, Figura 10, conforme diminui-se σ , a energia cinética final, após a passagem da onda, é igual à energia cinética inicial, ou seja, a energia para um tempo antes da partícula entrar em "contato" com a onda gravitacional. Logo, podemos concluir que para uma onda gravitacional plana impulsiva ocorre uma variação abrupta na energia cinética na região da onda tanto para a partículas inicialmente em repouso, quanto em movimento. Além disso, a energia cinética pode voltar ao seu valor inicial após a passagem da onda ou variar positiva ou negativamente.

Portanto, concluímos que ocorre efeito de memória gravitacional no sistema, já que as trajetórias e velocidades das partículas são alteradas. Ademais, vimos que a energia cinética de uma partícula pode aumentar, diminuir ou não sofrer variação em relação à energia cinética inicial e final, após a propagação da onda.

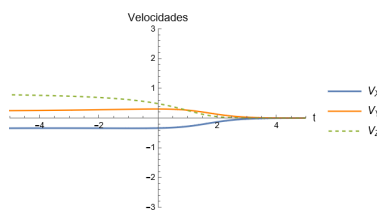


Figura 6: Velocidades V_X , V_Y , V_Z em função do tempo de uma partícula que passa por uma onda gravitacional com perfil gaussiano $\sigma = 1$ com condições iniciais $X(-5) = 5$, $X'(-5) = 0$, $Y(-5) = 0$, $Y'(-5) = 0$, $V(-5) = 5$, $V'(-5) = -1$.

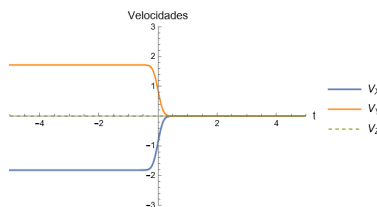


Figura 7: Velocidades V_X , V_Y , V_Z em função do tempo de uma partícula que passa por uma onda gravitacional com perfil gaussiano $\sigma = 0,1$ com condições iniciais $X(-5) = 5$, $X'(-5) = 0$, $Y(-5) = 0$, $Y'(-5) = 0$, $V(-5) = 5$, $V'(-5) = -1$.

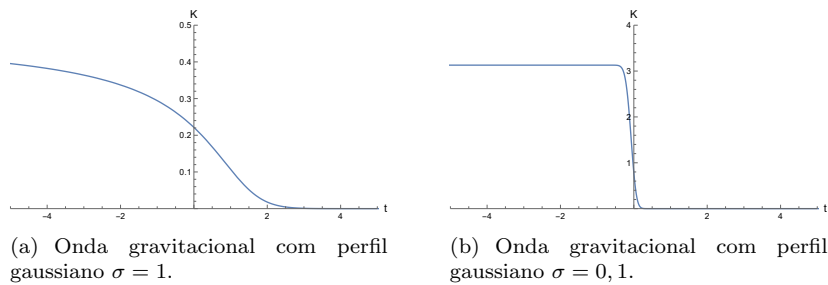


Figura 8: Energia cinética total em função do tempo para uma onda gravitacional com perfis gaussianos $\sigma = 1$ e $\sigma = 0, 1$, com condições iniciais $X(-5) = 5, X'(-5) = 0, Y(-5) = 0, Y'(-5) = 0, V(-5) = 5, V'(-5) = -1$.

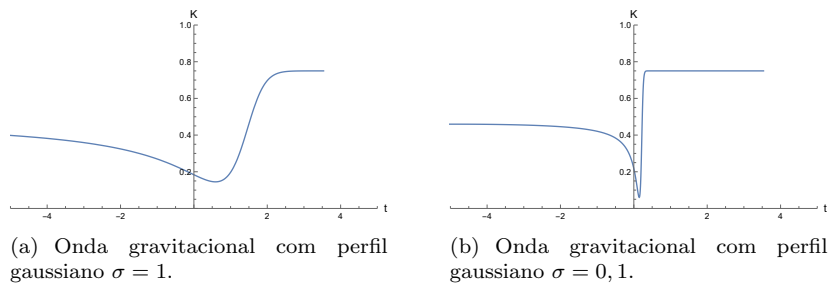


Figura 9: Energia cinética de uma partícula que passa por uma onda gravitacional com perfis gaussianos $\sigma = 1$ e $\sigma = 0, 1$ para condições iniciais $X(-5) = 5, X'(-5) = 0.5, Y(-5) = 5, Y'(-5) = 0, V(-5) = 0, V'(-5) = 0$.

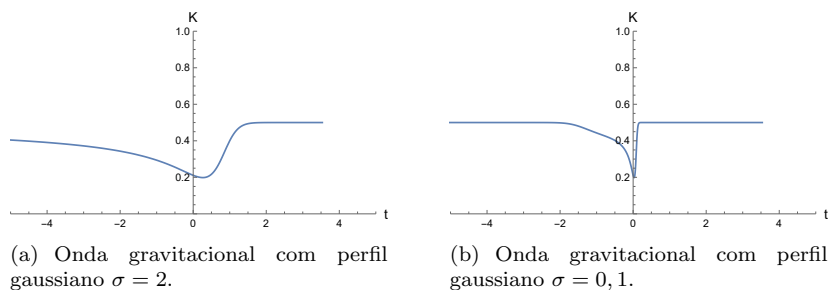


Figura 10: Energia cinética de uma partícula que passa por uma onda gravitacional com perfis gaussianos $\sigma = 1$ e $\sigma = 0, 1$ para condições iniciais $X(-5) = 5, X'(-5) = 0, Y(-5) = 5, Y'(-5) = 0, V(-5) = 0, V'(-5) = 0$.

Referências

- [1] Hans Stephani. *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 3rd edition, 2004.
- [2] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [3] P-M Zhang, Christian Duval, GW Gibbons, and PA Horvathy. The memory effect for plane gravitational waves. *Physics Letters B*, 772:743–746, 2017.