Análise Transiente de Vigas de Timoshenko através do Método dos Elementos Finitos

Palavras-Chave: Vigas, Estrutura, Elementos

Autores/as:

RAFAEL SATURNO SPANHA - UNICAMP

Prof. Dr. CARLOS HENRIQUE DAROS (orientador/a) - UNICAMP

INTRODUÇÃO:

A mecânica dos sólidos é a área da engenharia que estuda o comportamento de estruturas de corpos sólidos, seja dinâmica ou estaticamente. A teoria de vigas, corpos que sofrem excitações transversais, possui uma simplificação muito utilizada e que tem boa *performance* em corpos esbeltos (cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões). Tal aplicação denomina-se teoria de Euler-Bernoulli.

Entretanto, tal teoria é falha quando trata-se de vigas não-esbeltas. Nestes casos, é necessária a consideração de que a rotação da seção transversal da viga não é dependente apenas da taxa de variação na direção longitudinal, mas também de uma função de deformação transversal (γ_{xx}).

Por outro lado, destaca-se a dificuldade de elaborar modelos matemáticos complexos analiticamente. Portanto, neste projeto, o método utilizado será o de elementos finitos, através da linguagem de programação Fortran, aliada ao sistema operacional Linux.

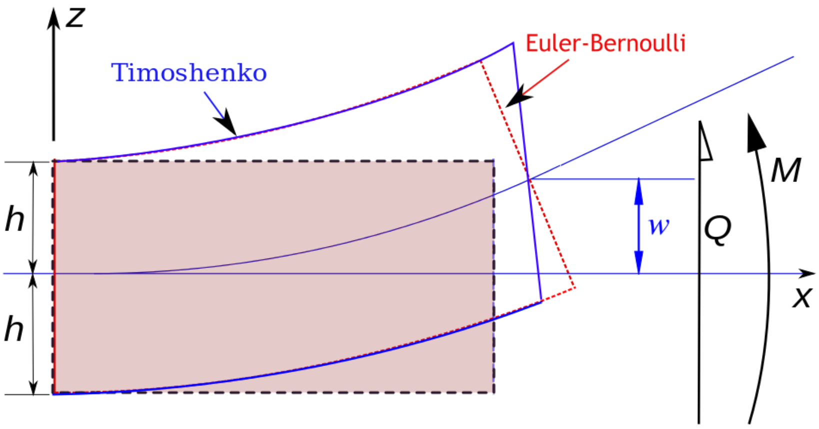

Figura 1: Diferença entre vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Fonte: https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:TimoshenkoBeam.svg

METODOLOGIA:

Para a obtenção de conteúdo, foram utilizados 3 métodos: seminários de apresentação de conteúdo por parte do orientador; seminários de explicação de teoria e resolução de problemas por parte do aluno e leitura dos materiais recomendados pelo orientador, como livro texto e apoio.

Todas as atividades foram realizadas de maneira remota, utilizando computador próprio do aluno; plataformas Google Meet, Drive e Gmail para comunicação e compartilhamento de conteúdos; software TeXstudio para execução, compilação e exibição de apresentações e relatório; software Wolfram Mathematica, cuja licença é fornecida pela Universidade Estadual de Campinas, para a realização de cálculos matemáticos analítico; sistema operacional Ubuntu, versão 20.04.3 LTS e editor de texto aliado ao terminal Ubuntu para compilar programas na linguagem Fortran.

Alguns conceitos foram profundamente estudados e aprendidos. Alguns deles estarão descritos a seguir.

1. Notação indicial

Conhecida como notação de Einstein, é amplamente utilizada para sintetizar equações extensas em expressões menores, com o uso da ideia básica: $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$

2. Cálculo variacional

Para encontrar o extremo de uma função, é possível utilizar esta concepção, já que em alguns casos, a simples operação $\frac{df}{dx} = 0$ não é tão simples de ser realizada. Assim, faz-se um funcional integral e, após isso, aplica-se a derivada igual à nulidade. O exemplo da curva braquistócrona foi utilizado.

3. Princípio da Mínima Energia Potencial (PMEP)

O PMEP é uma aplicação direta do cálculo variacional. Ele utiliza a ideia de natureza, ou seja, a forma natural de energia potencial é a mínima possível, resultando em estabilidade. O cálculo consiste em encontrar um funcional de energia potencial e torná-lo extremo (mínimo).

4. Análise de tensão

A análise de um ponto de um corpo rígido resulta em uma configuração complexa de tensões, que pode ser simplificada de acordo com a aplicação e o material estudado. Os tensores de tensão foram definidos e aqui foi aplicada a notação de Einstein.

5. Forma fraca e Formulação fraca

Como desejamos discretizar um intervalo de pontos no MEF, a forma derivada não é agradável para a aplicação. A forma integral é muito mais adequada, visto que seu conceito consiste em uma soma de elementos infinitesimais, assim como o MEF, com a diferença de tamanho de cada elemento (finito). Assim, estratégias de integração foram relembradas e utilizadas para enfraquecer equações diferenciais ordinárias.

6. Método dos resíduos ponderados de Ritz-Galerkin

A utilização de funções aproximadoras e interpoladoras $(w(x)\ e\ \phi(x))$ é o que resume tal método. Este atua em um elemento e é uma das melhores maneiras de encontrar uma solução. A restrição de tal método é a complexidade de sua utilização. Como visto em um exemplo, os diversos resíduos computacionais do método não permitiram um resultado satisfatório na solução de uma equação diferencial ordinária de quinta ordem. O resultado é mostrado na figura abaixo.

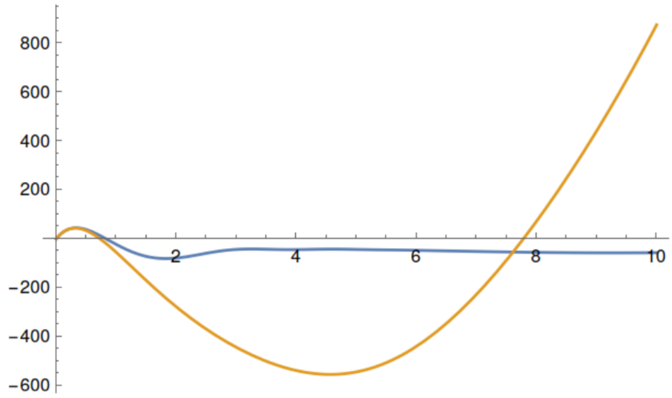

Figura 2: Tentativa de solução de EDO de 5ª ordem com o método de Ritz-Galerkin.
Curva azul: esperada. Curva alaranjada: obtida.

7. Método dos Elementos Finitos (MEF) em duas dimensões

A aplicação em 2 dimensões do MEF é importante para sair do regime unidimensional. Como nas vigas de Timoshenko devemos avaliar uma função de deformação transversal, e não somente deformação vertical. Para isso, foi feita uma apresentação para sintetizar o conceito.

8. Aplicação do MEF em vigas de Euler-Bernoulli e Vigas de Timoshenko

O último tópico abordado durante o período de iniciação científica foi a aplicação do MEF às vigas. A forma fraca e a discretização para as equações que compõem a teoria de Timoshenko foram feitas e compuseram uma apresentação.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Como exposto no relatório final da pesquisa, tal não foi concluída em detrimento de um estágio supervisionado por parte do aluno. Portanto, os resultados aqui apresentados serão a respeito de dois dos seminários realizados e apresentados por parte do aluno que possibilitaram a captura de algum resultado palpável.

1. Cálculo Variacional

O primeiro seminário citado aqui será a solução de um exercício de introdução ao cálculo variacional.

Exercício: Dado o funcional:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left[3x^2 + 2x(y')^2 + 10xy\right] dx$$

Qual a equação de Euler-Lagrange?

Aqui, definiu-se um conjunto de funções $\widetilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, em que ε é um parâmetro de controle e $\eta(x)$ uma função qualquer.

Após isso, desenvolveu-se o funcional I e encontrou-se a primeira derivada em relação a ε, $\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0$. Com muitas manipulações algébricas, uso do Teorema Fundamental do Cálculo e uso da propriedade:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Pôde-se concluir que a equação de Euler-Lagrange seria:

$$10x - 4y' - 4xy'' = 0$$

2. PMEP

Para o problema mostrado na figura 3, monte a energia potencial total (despreze a parcela do cisalhamento). Após a montagem da energia total, derive a equação de Euler-Lagrange do problema usando o operador δ, bem como as condições de contorno naturais e essenciais.

Elementos do problema: viga de comprimento **L** apoiada na extremidade direita em **roletes**, distribuição de forças ao longo de toda a viga **q(x)**, mola axial de rigidez **k** e mola torcional de rigidez **μ**. A energia total Π do sistema viga-molas dá-se por: $\Pi = U + V_{ext}$.

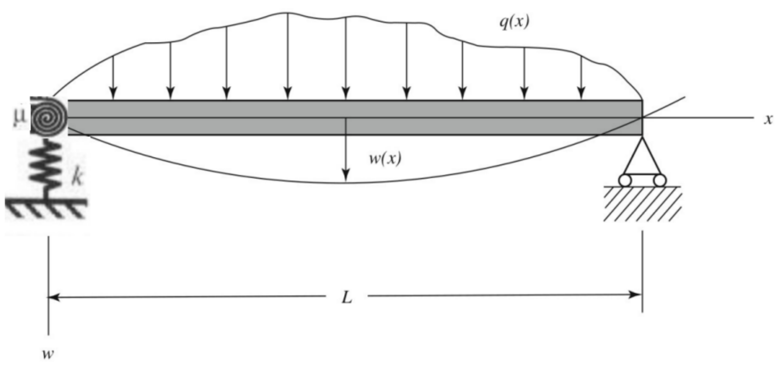

Figura 3: Problema de viga submetida a esforços diversos.

Aqui, foi calculada a energia proveniente de esforços externos, utilizando trabalho virtual; a energia de deformação na viga e as energias potenciais em ambas as molas. Após isso, foi feito o funcional da energia total, dado por:

$$\Pi(x) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 - q(x) \cdot w(x) \right] dx + \frac{k \cdot w(0)^2}{2} + \frac{\mu}{2} \left(\left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_0 \right)^2$$

Aplicando o conceito de variacional (δ) ao funcional e igualando à nulidade, pode-se manipular as expressões e obter os seguintes resultados:

$$EI \frac{d^4w(x)}{dx^4} - q(x) = 0 \tag{1}$$

$$k \cdot w(0) + EI \left. \frac{d^3w(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

$$\left[\mu \frac{dw(x)}{dx} - EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 \tag{3}$$

$$EI \left. \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \tag{4}$$

A equação (1) trata-se da equação de Euler-Lagrange. As equações (2),(3),(4) tratam-se das condições de contorno. E além disso, da definição de apoio por roletes, $w(L) = 0$.

CONCLUSÕES:

Apesar de o projeto não ter sido concluído, grande parte do conhecimento básico necessário para aprofundar o projeto em vigas de Timoshenko foi adquirido pelo aluno. É notável a importância de cada um dos temas tratados nesta iniciação científica. Destaca-se aqui a importância do MEF aliado ao método de Ritz-Galerkin, que possibilitam a solução por elementos de um problema complexo. Assim, é possível afirmar que a análise proposta é passível de execução com o método, utilizando quaisquer algoritmos iterativos.

BIBLIOGRAFIA

SMITH; Ian Moffat, GRIFFITHS; Denwood Vaughan, and MAGARETTS; Lee. **Programming the Finite Element Method**. John Wiley & Sons, 2013.

REDDY; Junuthula Narasimha. **Introduction to the Finite Elements Method**. 2019.