

Modelagem de Problemas da Elasticidade Anisotrópica Plana através do Método dos Elementos Finitos

Palavras-Chave: [[MEF]], [[Bidimensional]], [[Elasticidade]]

Autores/as:

RAFAEL AUGUSTO BRAGA COTA [UNICAMP]

Prof.^a Dr.^a CARLOS HENRIQUE DAROS (orientador/a) [UNICAMP]

INTRODUÇÃO:

O projeto aqui proposto insere-se na modalidade de Iniciação Científica. A área de atuação refere-se à Mecânica do Contínuo. O projeto tem como objetivo a introdução ao Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise de problemas da elasticidade 2D. Como objetivo final propõe-se a elaboração de um programa de Elementos de Finitos em Fortran para o cálculo de problemas nos estados Planos de Tensão e Deformação para materiais anisotrópicos.

METODOLOGIA:

Dentro das equações de EPT e EPD para materiais ortotrópicos. A elasticidade linear descreve os estados de deformação (infinitesimal) e tensão de meios cujos materiais possuem relações constitutivas lineares entre estes dois estados. Dos quais essas relações podem ser percebidas pelas relações da figura (1). Os índices de σ sofrem a mudança ($xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = 4$, $xz = 5$, $xy = 6$). Dentro das milhares de configurações possíveis existe uma classe onde as equações se tornam independentes de uma das coordenadas. Esta classe torna possível fazer uma análise bidimensional, sendo que tais problemas são governados por dois estados elásticos, os chamados Estado Plano de Tensão (EPT) e Estado Plano de Deformação (EPD).

$$\sigma_p = C_{pq} \epsilon_q$$
$$\epsilon_p = S_{pq} \sigma_q$$

Figura 1 - Relações constitutivas fonte: própria

Para a ocorrência de EPD é necessário a ocorrência de 3 coisas: Uma dimensão muito maior do que as outras, carregamento não varia ao longo da maior dimensão e não há carregamento na maior dimensões.

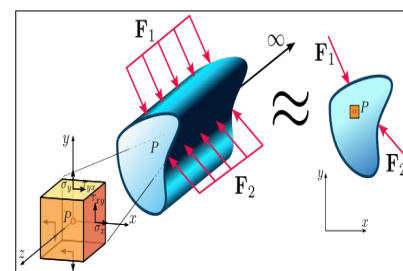


Figura 2 - Estado de deformação plana fonte: wikipedia.org

Para a ocorrência de EPT é necessário a ocorrência de 3 coisas: Uma dimensão muito menor do que as outras, não existam forças perpendiculares ao plano formado pelas duas dimensões maiores e forças não variem ao longo da espessura.

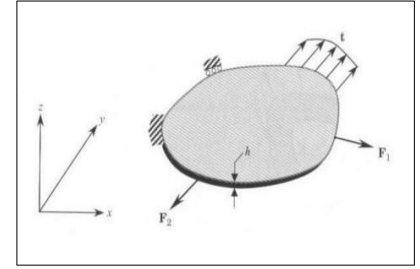


Figura 3 - Estado de Tensão plana
fonte: wikipedia.org

Dentro ainda da análise de EPD e EPT, ainda existem os materiais ortotrópicos, os quais apresentam algumas características:

(1) Não há interação entre tensões normais e deformações de cisalhamento, (2) Não há interação entre deformações normais e tensões de cisalhamento e (3) Não há interação entre deformações de cisalhamento e tensões de cisalhamento em diferentes planos. Desse modo as relações dadas na figura (1) são reescritas tanto para o caso **EPD**:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}$$

Quanto para o caso **EPT**:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{44} & 0 \\ 0 & \hat{C}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}$$

Figura 5 - Relação constitutiva para EPT. fonte:Elaboração própria

Em que as constantes elásticas reduzidas são definidas pela equação mostrada ao lado. Desse modo as relações das constantes de engenharia serão redefinidas a ficarem igual ao modo apresentado abaixo:

$$\hat{C}_{pq} = C_{pq} - \frac{C_{p3}C_{q3}}{C_{33}} = \hat{C}_{qp}$$

Figura 6 - Constantes elásticas reduzidas.
fonte:Elaboração própria

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{13}+\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}+\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & \frac{1-\nu_{21}\nu_{12}}{E_2 E_1 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}$$

Figura 7 - Constantes de engenharia. fonte:Elaboração própria

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Figura 8 - Definição de Delta
fonte:Elaboração própria

Desse modo. Com a base teórica apresentada para esses dois casos, foi se elaborado/aprimorado um programa de método de elementos finitos para a resolução de problemas EPD e EPT. A metodologia utilizada para construção foi-se baseada na organização de (SMITH, 2014, p.172).

O qual com o uso de FORTRAN 2003. Sendo assim, o programa lê um arquivo .dat, que possui o tipo de estado, o elemento usado, numero de nós por elemento e outras informações para a construção da malha. Logo após, são alocadas as informações nos arrays específicos.

Consequentemente, com as dimensões exatas, a matriz nula global de rigidez é formada. A partir disso, o programa começa a realizar diversas iterações com o uso de algumas subrotinas para a obtenção do valores da matriz de rigidez. Com esses valores, ocorre a iteração dos mesmos para a resolução das equações do problema.

Por último, a partir das coordenadas e vetores diretores, as iterações são realizadas até se obter as tensões e deformações dos elementos.

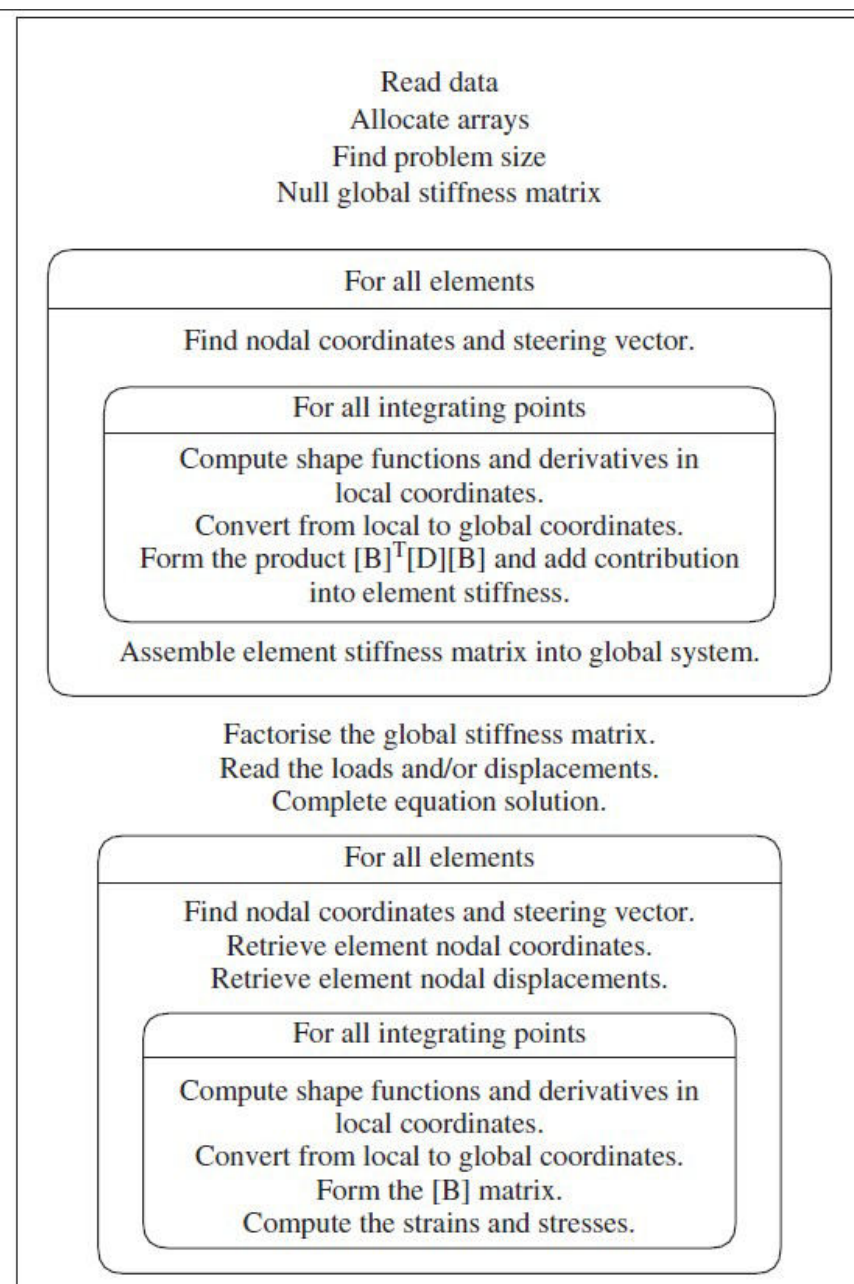


Figura 9 - Metodologia utilizada para desenvolvimento do programa
fonte: SMITH, 2014, p.172

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Assim, foram tomados 2 problemas, um de cada estado plano diferente, o primeiro foi feita a análise do problema 5.4 do livro de (SMITH, 2014, p.200). Apresentado abaixo:

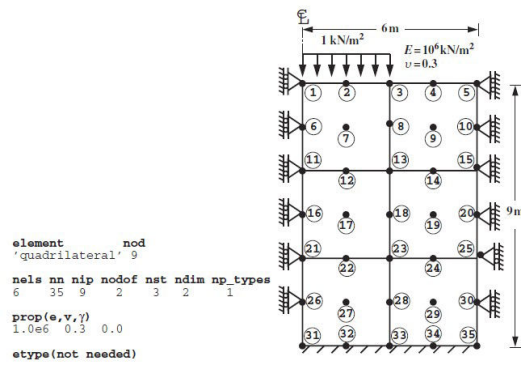


Figura 10 - Exemplo 5.4
fonte: SMITH, 2014, p.200

Desse modo, a malha escolhida para o problema foi de elementos quadrados com 4 nós em cada elementos. As deformações obtidas a partir do pós processamento foram:

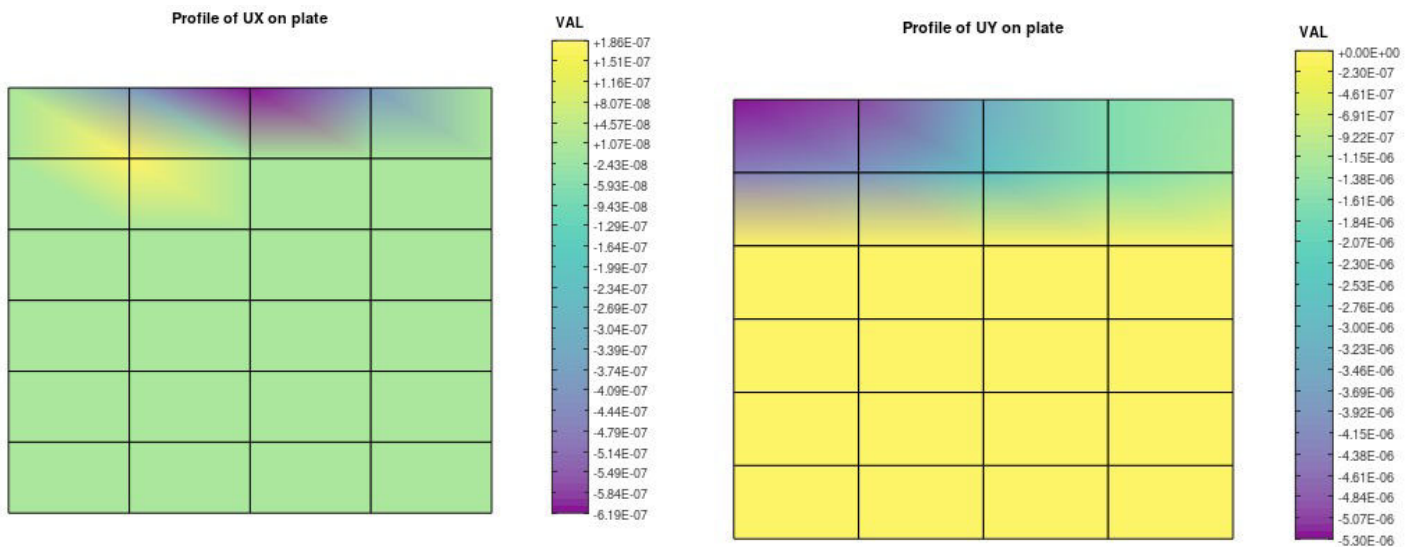


Figura 11 e 12 - Deformações em x e y na placa de EPD
fonte: Elaboração própria

Para o problema EPT, foi escolhido fazer a comparação com um problema já proposto (KSSV, 2022), o qual tem a configuração de uma placa fina com tração nas laterais :

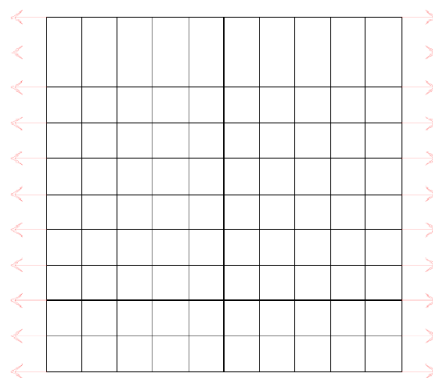


Figura 13 - Tração de placa plana EPT
fonte: KSSV(2022)

Assim, usando a mesma configuração de malha apresentada no exercício anterior obteve-se tais deformações:

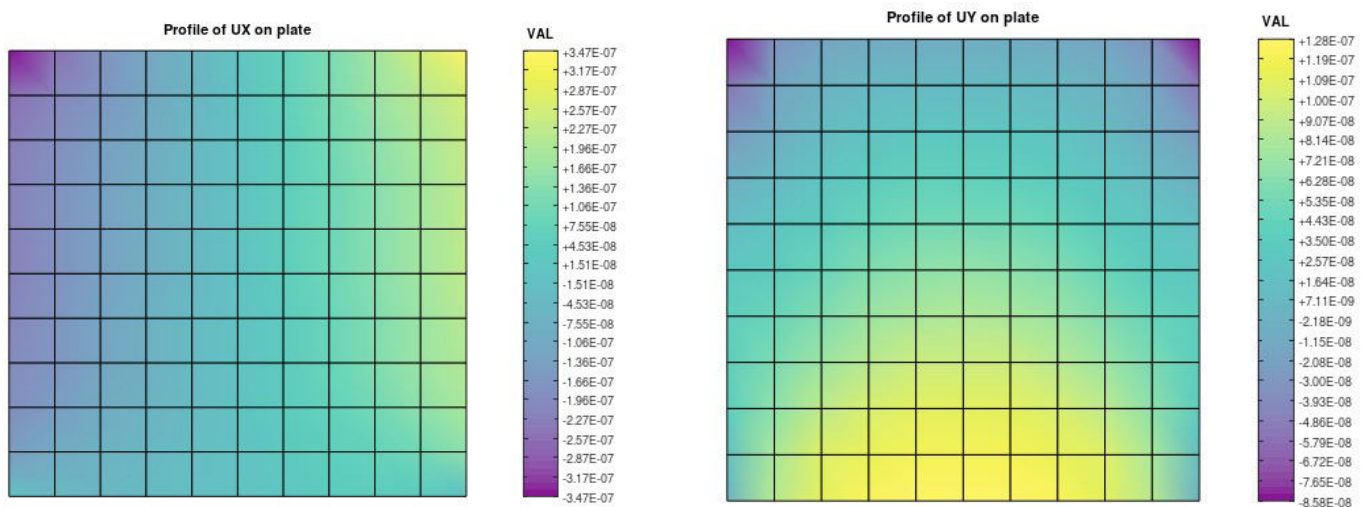


Figura 14 e 15 - Deformações em x e y na placa de EPT
fonte: Elaboração própria

CONCLUSÕES:

Pode se concluir que o método de elementos finitos é uma boa alternativa computacional para resolução de problemas de elasticidade no plano. Com o enfoque nas classes de estado plano de tensão e deformação, foi possível realizar um programa que apresente uma resposta satisfatória a esses tipos de problemas em diversas configurações e situações de sistemas diferentes. Sendo que sua utilização pode ter uma boa aplicação em vários cenários.

BIBLIOGRAFIA

- SMITH, I. M; Griffiths, D. V; Margetts, L. **Programming The Finite Element Method**. 5th edition. John Wiley & Sons Ltd, 2014.
- REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3rd edition. McGraw-Hill, 2006.
- HWU, C. **Anisotropic Elastic Plates**. Springer Science+Business Media, LLC 2010.
- SHAMES, I. H; Dym, C. L. **Solid Mechanics: A Variational Approach**. Augmented Edition. Springer Science+Business Media New York, 2013
- KSSV (2022). **The Plane Stress Problem**
(<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31788-the-plane-stress-problem>),
MATLAB Central File Exchange. Retrieved July 12, 2022.