



Estudo da Transmissão de Informação em Redes Complexas

Palavras-Chave: Redes Complexas, Dinâmica, Renormalização

Autores:

Gabriel Almeida dos Santos Bonin, IFGW – Unicamp

Prof. Dr. José Antônio Brum, IFGW - Unicamp

INTRODUÇÃO:

Uma rede pode ser definida como um ou mais grafos com propriedades topológicas não triviais que são representados por nós (vértices) conectados entre si por arestas (links). Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre redes complexas, com foco em diferentes aspectos. Inicialmente, explorou-se a teoria das redes complexas, buscando compreender sua estrutura e dinâmica por meio da rede neural do nematóide conhecido por *Caenorhabditis elegans* (*C. elegans*).

Em seguida, de modo a caracterizar a rede biológica usada no projeto e a fim de obter parâmetros de comparação, foram investigados modelos nulos e sintéticos, como o modelo Erdős-Rényi, Barabási-Albert e Maslov-Sneppen.

Em relação à dinâmica, foram estudados modelos de difusão, roteamento e navegação em redes. Para exemplificar a transmissão de informação em redes, o modelo de difusão escolhido para a criação de uma simulação foi o Linear Threshold Model (LTM).

Por fim, foram aplicadas duas técnicas de renormalização de redes, a Laplaciana e a Geométrica, com o intuito de simplificar e analisar a preservação da estrutura de dinâmica das redes estudadas, permitindo identificar características importantes e padrões emergentes.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada consistiu em primeiro adquirir os dados da rede neural estrutural da *C. elegans*, a partir da plataforma conhecida e de domínio público WormAtlas [1]. A partir disso, usando a linguagem de programação *Python 3* e o pacote *Networkx*, foi possível construir o grafo com 281 nós (neurônios), uma vez que apenas as conexões elétricas e químicas foram consideradas, descartando as musculares.

As análises que vieram em seguida foram baseadas na fundamentação teórica por trás da teoria de redes [2,3], e com isso parâmetros matemáticos puderam ser obtidos, como mostra a Tabela 1. De modo a ter valores de referência em relação às medidas obtidas, a teoria de redes permite a construção de modelos nulos e sintéticos [2], aleatórios, que servem como um “benchmark” para a rede em estudo (Tabela 2).

Tabela 1: Análise quantitativa da rede neural da *C. elegans*

Parâmetro	Resultado
Grau Médio	16.31
Média de Menor Caminho	2.44
Eficiência Global	0.44
Coefficiente de Clusterização	0.33
Transitividade	0.21

Tabela 2: Análise quantitativa dos modelos nulos e sintético

Parâmetro	Erdo-Renyi	Barabási-Albert	Maslov-Sneppen
Média de Menor Caminho	2,32 ± 0,01	2,30 ± 0,01	2,27 ± 0,01
Coefficiente de Clusterização	0,06 ± 0,01	0,12 ± 0,01	0,12 ± 0,02

Dessa forma, a dinâmica em redes pôde ser compreendida [3] levando em conta classes de dinâmica de informação, tais como roteamento, navegação e difusão. De maneira geral, roteamento indicaria uma propagação de informação objetiva e certa, como se um “mapa” global da rede fosse consultado; a navegação seria análogo ao primeiro, mas com conhecimento local da rede, tomando decisões ponderadas em parâmetro locais; a difusão seria uma propagação do sinal simultaneamente em todas as direções dentro da rede, havendo uma chance de não alcançar o alvo. A última, que é a melhor aproximação para a transmissão de informação em redes reais, foi implementada e simulada de acordo com o modelo conhecido como Linear Threshold Model [4], além da aplicação de outras métricas como Comunicabilidade, Average First Passage Time e Average Commute Time.

Por fim, técnicas de renormalização de redes foram estudadas, destacando a renormalização geométrica [5] e a renormalização laplaciana [6]. O objetivo, portanto, foi avaliar como a dinâmica de redes é preservada quando visto sob diferentes escalas de observação.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

A primeira análise acerca da estrutura da rede em questão se deu analisando a existência da propriedade de “pequeno mundo” ($\sigma > 1$), a qual permite que um grafo seja fortemente conectado e com um comprimento médio entre os vértices pequeno. Isso indica, por exemplo, uma vantagem quando vista sob a ótica da dinâmica. A maneira de verificar isso é dado pela Equação 1

$$\sigma = \frac{C/C_{rand}}{L/L_{rand}} \quad (1)$$

onde C corresponde ao coeficiente de clustering e L ao comprimento médio da rede da *C. elegans*. O subscrito “rand” indica os mesmos coeficientes, mas obtidos a partir de uma rede aleatória (“random”). A Tabela 3 mostra os resultados obtidos levando em conta os três modelos de rede sintética/nula.

Tabela 3: Medidas de Small World da *C. elegans* em relação a modelos nulos

Modelo Nulo	Erdos-Renyi	Barabási-Albert	Maslov-Sneppen
Pequeno Mundo	5.51	2.56	2.26

Em relação à dinâmica, uma simulação computacional foi feita utilizando o Linear Threshold Model de difusão. A ideia básica por trás é que cada nó pode assumir um estado (s) ativado (1) ou inativo (0), ou seja, $s = \{0,1\}$. Dado uma “seed” inicial escolhida aleatoriamente, ou seja, um neurônio ativo, seus vizinhos também adotarão o estado ativado ($s = 1$) se a seguinte condição for satisfeita

$$\theta \cdot k_i < \sum_{j \in N} s_j(t) \quad (2)$$

onde k_i é o grau do nó i , N é o total de neurônios da rede e $\theta = 0.008$ foi um limiar definido com base em Misic et al [4] e após uma análise com a compatibilidade desse valor com a rede em questão. O resultado é visto na Figura 1. Outras métricas para o tempo de adoção de um novo estado para cada vértice da rede podem ser obtidas calculando a Receptividade, Comunicabilidade, Average First Passage Time e Average Commute Time, que foram melhor abordadas nos relatórios. Os resultados são mostrados na Figura 2.

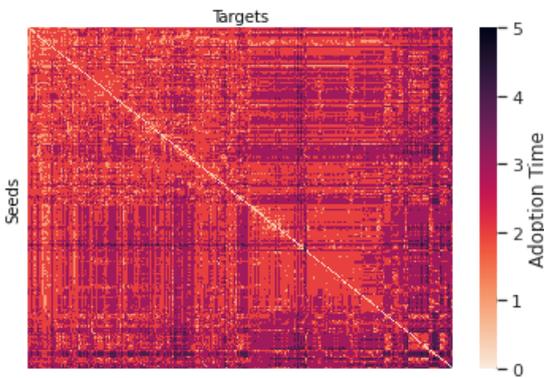


Figura 1: *Heatmap* obtido com o Linear Threshold Model

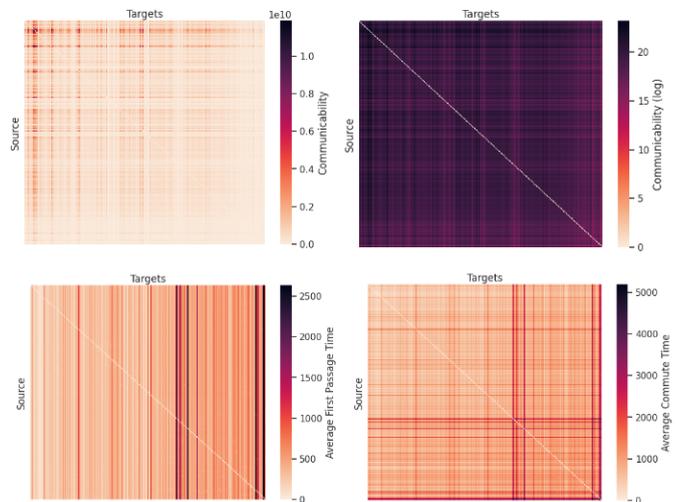


Figura 2: *Heatmaps* obtidos analisando métricas de dinâmica em redes

Por fim, dois processos de renormalização foram aplicados na rede em questão, separadamente, de modo a observar como a mudança de escala afeta a dinâmica por difusão no LTM. A primeira técnica, conhecida como Renormalização Geométrica, já é bem consolidada na literatura e busca representar o grafo em um espaço

hiperbólico, ou mais especificamente, no disco de Poincaré, de modo a obter as chamadas variáveis escondidas relacionadas à distância do nó ao centro do disco e o seu ângulo formado. Dessa maneira, vértices com variáveis escondidas similares são agrupados em supernós. Já a segunda técnica, a Renormalização Laplaciana, foi desenvolvida pelo nosso grupo de Redes Complexas do IFGW. A ideia básica por trás é agrupar nós, com alta correlação, em supernós. Essa “função” correlação é obtida a partir de uma relação com a matriz laplaciana da rede, que pode ser obtida pela expressão (3)

$$L = D - A \quad (3)$$

onde D é uma matriz diagonal com o grau de cada nó da rede, e A é a matriz de adjacência cujas entradas são $a_{ij} = 1$ se há uma conexão entre os nós i e j , e $a_{ij} = 0$ se não há. Os resultados da simulação LTM em cada etapa da renormalização podem ser vistos na Figura 3, na qual é notável a semelhança entre os dois métodos quando vistos sob a perspectiva da dinâmica de difusão. Além de uma análise superficial em relação aos semelhantes mosaicos e distribuição de cores nos *heatmaps*, destaca-se também o fato de que o número de iterações necessárias para tornar a rede inteiramente ativada concorda em ambos os métodos, indo de cinco iterações na rede original para apenas três nas redes renormalizadas. Esse é um forte indício de que a estrutura da rede mantém-se semelhante após o coarse-graining dos dois métodos, tornando-os equivalentes.

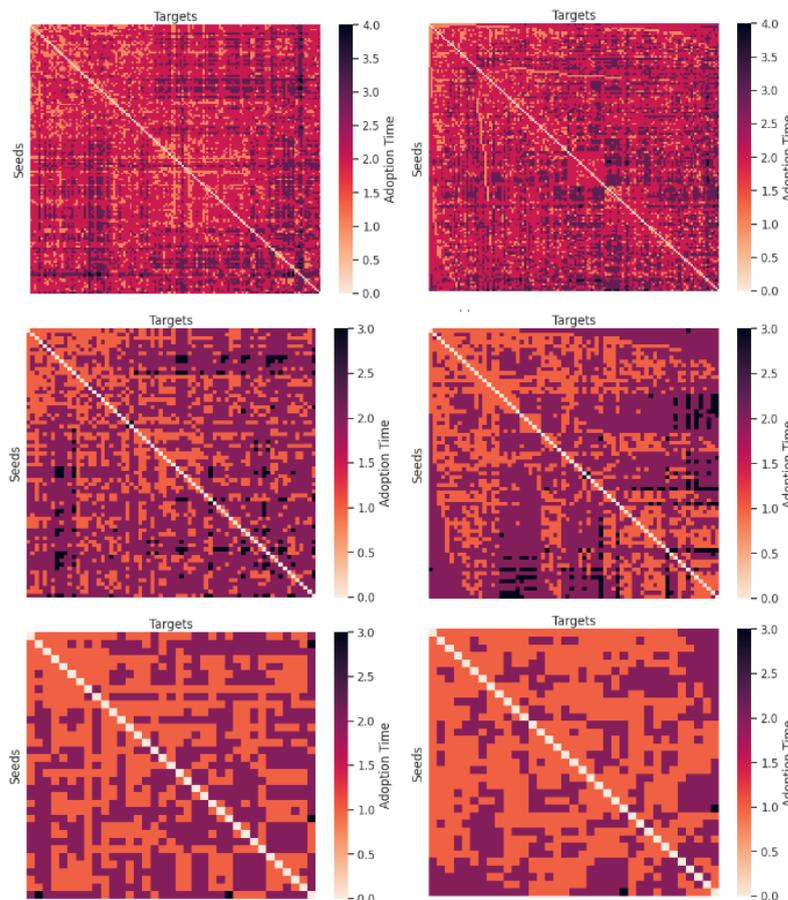


Figura 3: Os três *heatmaps* à esquerda correspondem ao modelo LTM aplicado na rede da *C.elegans* com a renormalização laplaciana de três etapas, enquanto que os da direita são três etapas de renormalização geométrica.

CONCLUSÕES:

Neste trabalho, realizamos uma análise numérica detalhada da rede complexa em estudo e concluímos que ela apresenta a propriedade de pequeno mundo. Essa descoberta é significativa, pois indica que a rede possui uma estrutura fortemente conectada e um curto comprimento médio de caminho, o que facilita a comunicação e a propagação de informações entre os nós.

Além disso, aplicamos com sucesso o modelo de difusão LTM (Linear Threshold Model), bem como outras métricas de dinâmica, como comunicabilidade, Average First Passage Time e Average Commute Time. Essas métricas nos forneceram insights valiosos sobre a propagação de informações e a dinâmica da rede.

Outro aspecto importante do trabalho foi a aplicação da renormalização laplaciana e geométrica na rede. Ao comparar os resultados desses dois métodos, observamos uma possível equivalência quando analisados sob a ótica da dinâmica por difusão. Essa descoberta sugere que ambas as abordagens podem fornecer informações semelhantes sobre a propagação de informações na rede e a dinâmica dos nós.

BIBLIOGRAFIA

- [1] <https://www.wormatlas.org/>
- [2] L.-A. Barabási, *Network Science*, (Cambridge University Press, 2016)
- [3] Mark Newman, *Networks: An Introduction*, 2a. ed., (Oxford University Press, 2018).
- [4] B. Misić, R.F. Betzel, A. Nematzadeh, J. Goni, A. Griffa, P. Hagmann, A. Flammini, Y.-Y. Ahn, e O. Sporns, "Cooperative and Competitive Spreading Dynamics on the Human Connectome", *Neuron* 86, 1518 (2015)
- [5] G. Carcía-Pérez, M. Boguñá e M. Ángeles Serrano. "Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization". Em: *Nature Physics* 14 (2018), pp. 583–589
- [6] Matheus de C. Loures, Alan Albert Piovesana, and José Antônio Brum, "Laplacian Coarse-Graining in Complex Networks", Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, 2023