Uma Introdução a Desiguadades Variacionais e suas Aplicações

Luis Matheus Invernizzi Canhassi (Aluno), IMECC – UNICAMP
Prof. Dr. João Vitor da Silva (Orientador), IMECC – UNICAMP

19 de julho de 2023

Sumário

1 Introdução

Palavras-chave: (Desiguadade Variacional, Problema de obstáculo, unicidade de solução)

As desigualdades variacionais é tema muito utilizado em algumas áreas da matemática quando queremos otimizar alguma coisa, portanto, sua aplicação é muito recorrente, por exemplo, na matemática financeira e na fisica, na aplicação do chamado problema de obstáculo. Então veremos mais adiante algumas dos principais conceitos/ferramentas básicas necessárias para o entendimento e a aplicação do problema de obstáculo, assim como, alguns resultados da pesquisa.

2 Conceitos Básicos

Começaremos vendo um exemplo expecífico de desigualdade variacional que é o problema de obstáculo.Resumidamente o problema de obstáculo consite em encontrar a posição de equilıbrio de uma membrana elástica que está em cima de obstáculo, então temos que encontrar a posição de equilíbrio que minimiza a energia potencial envolvida nesse processo.Usaremos um exemplo teórico, definiremos alguns conceitos matemáticos importantes e mais ao final um numérico para ilustrarmos o que está acontecendo.

Exemplo Teórico- Caminho mais curto e equilıbrio da membrana, o comprimento da curva e a área de superficie de uma função v pode ser representada como:

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla v|^2}\, d\mu \tag{1}$$

Onde v entá em Ω, e Ω é um subconjunto de R ou R^2.

Para minimizar o caminho representado acima, como já demonstrado na metodologia, é preciso encontrar uma função que minimize esta integral. Para isso, vamos nos apropriar da Expansão de Taylor.

A Integral 1 pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla v|^2} = 1 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \mathcal{O}(|\nabla u|^4)$$

Onde o último termo pode ser descartado para valores $|\nabla u|$ pequenos. Ao minimizar o funcional, o termo constante pode ser desconsiderado, pois não afeta o problema de minimização, e (1) sendo suficiente apenas minimizar

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mu$$

Ao restringir o conjunto de funções à aquelas entre dois obstáculos, fica evidente que este problema corresponde à formulação do teorema com $f \equiv 0$.

Alguns conceitos são essenciais para a aplicação das desigualdades variacionais e, portanto, o problema de obstáculo. A seguir veremos a definição de alguns desses conceitos matemáticos.

Teorema do Ponto fixo de Banach

Definição: Seja R um subconjunto fechado do espaço métrico completo (X,d). Se A:$R \to R$ é uma contração, então A possui um, e somente um, ponto fixo em R.

Esse teorema é importante para mostrar que existe **unicidade de solução** do probloema de obstáculo.

Desiguladade de Poincaré

Seja $\Omega \subset R$ aberto e limitado e seja $f \in C^1_C(\Omega)$. Então existe uma constante C que depende apenas de Ω.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(n, \Omega) \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

Espaço de Hilbert

Espaço de Hilbert é qualquer espaço vetorial que possua uma operação denominada produto interno e cuja métrica gerada por esse produto interno o torne um espaço completo em relação a norma,

$$||.|| = (.,.)^{\frac{1}{2}}$$

O espaço L^2 definido como o espaço das sequências de quadrados somáveis é um importante exemplo de Espaço de Hilbert.

Exemplo Numérico

Agora utilizaremos um exemplo numérico para ilustrarmos o problema de obstáculo.

Exemplo Dado $\Omega =]-1,1[$, $g=0$, $\phi = -\frac{1}{18}$ e $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad |x| > \frac{1}{4} \\ 1-32x^2 & \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ Encontre u que satisfaz $-\Delta u = f$ e $-\Delta u \geq f$.

Considere os seguintes casos:

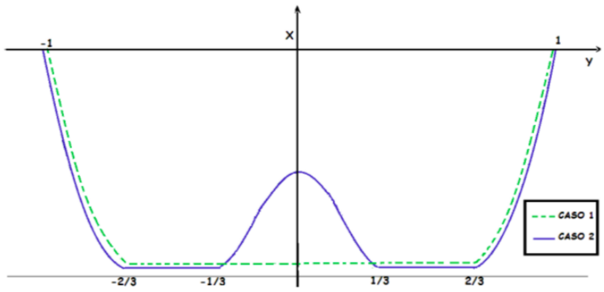
Caso 1: Seja $\Gamma = \pm\frac{2}{3}$ e o conjunto de coincidência dado por $\Omega^0 =]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$, e a função u definida como:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} & \text{se} \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

satisfaz a condição $-\Delta u = f$. Mas não $-\Delta u \geq f$

Caso 2: Seja $\Gamma = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ e o conjunto de coincidência dado por $\Omega^0 =]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, e a função u, definida como:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} & \text{se} \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x+\frac{1}{3})^2 & \text{se} \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{32} + \frac{8x^2}{3}(x^2 - \frac{3}{16}) & \text{se} \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x-\frac{1}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} & \text{se} \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x-\frac{2}{3})^2 & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Referências

[1] C Baiocchi and A Capelo. Variational and quasivariational inequalities: Applications to free-boundary problems (wiley, chichester. 1984.

[2] LA Caffarelli. The obstacle problem, lezioni fermiane. *Accademia Nazionale dei Lincei, Rome*, 1998.

[3] Ana Raquel Gonçalves. Resolução numérica de problemas de obstáculo com aplicações à matemática financeira. 2018.

[4] David Kinderlehrer and Guido Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications.* SIAM, 2000.

[5] Elon Lages Lima. *Elementos de topologia geral.* Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.

[2] [4] [1] [5] [3]