XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

Resolvendo as Equações de Navier-Stokes para Fluidos com alta viscosidade

EDP, Navier-Stokes, Sistema Divergente-Rotacional

Thiago Henrique De Nadai-UNICAMP
Profa. Dra. Gabriela Planas(Orientadora)-Imecc, UNICAMP

1 Introdução

O mundo inteiro é descrito por equações diferenciais parciais (EDP). São equações que dizem algo sobre como uma quantidade ou função varia em função do espaço, tempo ou qualquer outro aspecto. Aqui, mostraremos os métodos de solução das EDP mais conhecidas para demonstrar como resolver, em certos casos, as equações que talvez sejam as mais famosas no presente momento: as Equações de Navier-Stokes.

Neste resumo, t representará o tempo, por simplicidade, x sempre representará um vetor com 3 coordenadas e as funções em negrito representarão funções vetoriais em 3 dimensões. Resolveremos os problemas considerando todo espaço (sem condições de fronteira).

Este é um projeto financiado pela FAPESP, processo 2023/00500-5.

2 Metodologia

Primeiramente começamos apresentando duas EDP mais conhecidas e suas soluções em todo espaço (Solução Fundamental), que serão úteis para, no fim,

XXXI Congresso de Iniciação Científica Da UNICAMP - 2023 resolver as equações de Navier-Stokes. A primeira delas é a equação do Calor:

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Sua solução fundamental em três dimensões é dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} g(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4kt}\right) \, dy. \tag{1}$$

E a segunda é a equação de Poisson:

$$\Delta u = f(x).$$

Cuja solução fundamental é dada por:

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{4\pi|x-y|} dy. \tag{2}$$

Além destes resultados também iremos utilizar os resultados sobre sistemas de Divergente-Rotacional.

Dado um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = f(x,t) \\ \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(x,t), \end{cases}$$

podemos separar u em suas partes “sem rotacional” e “sem divergente”. Assim, se $\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \boldsymbol{\psi}$, onde $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$, temos:

$$\begin{cases} \Delta\phi = f(x,t) \\ \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{g}(x,t). \end{cases} \tag{3}$$

Tomando o rotacional da segunda equação em (3), segue:

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = -\nabla \times \boldsymbol{g}(x,t),$$

onde usamos a identidade: $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \Delta\boldsymbol{\psi}$.

Ambas equações são facilmente resolvidas, por serem equações de Poisson:

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times \boldsymbol{g}(y,t)}{4\pi|x-y|} dy - \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y,t)}{4\pi|x-y|} dy. \tag{4}$$

Por fim resumimos esta seção com o seguinte teorema que ilustra as hipóteses feitas em f e $\boldsymbol{g}$:

Teorema 1 *Sejam $\epsilon > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$, com $\nabla \cdot \boldsymbol{g} = 0$. Então, se para $|x|$ grande*

$$|f(x,t)| \leq \frac{C}{|x|^{3+\epsilon}}, \qquad |\nabla \times \boldsymbol{g}(x,t)| \leq \frac{C}{|x|^{3+\epsilon}},$$

A única solução do sistema de Divergente-Rotacional:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = f(x,t) \\ \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(x,t), \end{cases}$$

é dada por (4).

3 Resultados

Agora aplicaremos os conceitos da seção Metodologia para resolver as equações de Navier-Stokes em um caso especial. Veremos que as equações se tornam um sistema de Divergente-Rotacional que poderá ser facilmente resolvido.

As Equações de Navier-Stokes e sua condição inicial são dadas por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla F \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{g}(x), \end{cases}$$

onde $\boldsymbol{u}, \rho, p, \nu, \nabla F$ representam a velocidade do fluido, a densidade do fluido, a pressão, a viscosidade e uma força externa proveniente de um gradiente, como a gravidade, por exemplo, respectivamente.

Nesta forma as equações de Navier-Stokes são extremamente difíceis de serem resolvidas, devido à presença do termo não linear: $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$. Graças a sua presença, a equação deixa de ser linear e várias das propriedades úteis de equações lineares (como somar soluções para produzir outras) não se aplicam! Contudo, quando consideramos um fluxo lento como o de um líquido com uma viscosidade alta o suficiente (por exemplo, mel), este termo pode ser desconsiderado e as equações são reduzidas para:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla F \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{g}(x). \end{cases} \tag{5}$$

Tomando o rotacional da primeira equação em (5) chegamos em:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_t = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}(x,0) = \nabla \times \boldsymbol{g}(x) \end{cases} \tag{6}$$

em que $\boldsymbol{\omega}$ é a vorticidade do fluido, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$.

O impressionante é que (6) é a equação do calor! *Num fluido muito viscoso, a vorticidade se espalha pelo fluido como calor se espalha em um meio.*

Agora temos um sistema de Divergente-Rotacional dado por:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}. \end{cases}$$

Segundo (4), a velocidade do fluido é:

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times \boldsymbol{\omega}(y,t)}{4\pi|x-y|} dy,$$

enquanto a vorticidade, por (1), é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}(x,t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \boldsymbol{g}(z) \exp\left(-\frac{|x-z|^2}{4\nu t}\right)\, dz.$$

A solução final é então:

$$\boldsymbol{u}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \nabla \times \left(\frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \boldsymbol{g}(z) \exp\left(-\frac{|y-z|^2}{4\nu t}\right)\, dz\right) dy. \tag{7}$$

E, para achar a pressão, só precisamos resolver:

$$\nabla p = -\rho \boldsymbol{u}_t + \nu\rho\Delta\boldsymbol{u} + \nabla F, \tag{8}$$

o que é feito com simples integração.

Vale mencionar também que algumas hipóteses foram feitas sobre $\boldsymbol{g}$ e F. Elas são resumidas no seguinte teorema:

Teorema 2 *Sejam $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ com $\nabla \cdot \boldsymbol{g} = 0$ e $\nabla \times \boldsymbol{g}$ decaindo rapidamente no infinito. Existe uma única solução $\mathbf{u}(x,t)$ para as equações em (5) dada por (7) e existe uma solução única (exceto por uma constante aditiva) para $p(x,t)$ em (8).*

4 Conclusão

Assim, mesmo que as Equações de Navier-Stokes sejam famosas por sua dificuldade avassaladora, possuindo até um prêmio de um milhão de dólares para qualquer um que consiga provar ou refutar a existência de soluções regulares em três dimensões para todo tempo[1], existem casos onde alguns conceitos básicos de EDP podem resolvê-las.

Os conceitos de solução fundamental das equações de Poisson e do Calor são estudados em um primeiro curso sobre EDP, enquanto os sistemas de Divergente-Rotacional são uma simples aplicação das propriedades de cálculo vetorial. Contudo, mesmo se tratando de conhecimentos básicos, é possível chegar em uma fórmula geral para a solução das equações de Navier-Stokes!

Outro resultado impressionante é que a vorticidade se espalha segundo a equação do calor, quando a velocidade do fluxo é baixa. Ou seja, os lugares de alta vorticidade tendem a "passar" sua vorticidade para lugares de baixa vorticidade, assim como o calor flui do quente para o frio. Este resultado é puramente matemático!

Referências

S. Salsa, Partial differential equations in action: From modelling to theory, Vol 99, Springer, Berlin, 2016.

[1] https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/

XXXI Congresso de Iniciação Científica Da UNICAMP - 2023