XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

ESTRUTURAS GEOMÉTRICAS EM ESFERAS

Palavras-Chave: ESFERAS, ESTRUTURAS GEOMÉTRICAS, H-ESPAÇOS, PARALELISMOS, ESTRUTURAS QUASE COMPLEXAS, PROBLEMA DE HOPF, VARIEDADES INTEGRAIS

Autores:

EDUARDO TOFFOLO - UNICAMP

Prof. Dr. HENRIQUE N. DE SÁ EARP (orientador) - UNICAMP

Resumo

Este projeto aborda as estruturas geométricas quase complexas, de paralelismos e de H-espaços e sua relação com o problema de Hopf, que questiona sobre a integrabilidade das estruturas quase complexas em S^6, sendo desenvolvido no período de 01/10/2022 a 30/09/2023 sob o número de processo FAPESP 2022/09898-9.

1 INTRODUÇÃO:

Poucos anos depois de Hassler Whitney demonstrar que toda variedade diferenciável possui uma estrutura real-analítica [1], isto é, possui um atlas com mapas de transição analíticos, Heinz Hopf formulou uma questão análoga [2, p. 169]: toda variedade de dimensão par possui estrutura complexa (equivalentemente, é uma variedade complexa)? Isto é, as coordenadas locais podem ser interpretadas como pertencentes ao disco aberto $\mathbb{C}^n$ de modo que os mapas de transição sejam funções holomorfas?

Hopf respondeu negativamente a pergunta e exibiu contraexemplos no mesmo artigo. No entanto, a questão permanecia aberta para as esferas de dimensão $2m$, em que $m \neq 1, 2, 4$. Atualmente, a única esfera para a qual ainda não se tem resposta é S^6.

2 RESULTADOS E DISCUSSÃO:

2.1 Estruturas quase complexas

Definição 1. *$J : TM \to TM$ é uma estrutura quase complexa de uma variedade diferenciável M se J é suave, $J_a(v) = \pi_{T_aM} \circ J(a, v)$ é um operador linear tal que $J_a^2 = -I$ e $\pi_M \circ J(a, v) = a$, para todo $(a, v) \in TM$.*

Note que uma estrutura quase complexa em uma variedade diferenciável é mais geral que uma estrutura complexa. De fato,

Proposição 1. *Toda variedade com estrutura complexa possui estrutura quase complexa.*

O que uma uma estrutura quase complexa J em uma variedade diferenciável M faz, na prática, é complexificar os espaços tangentes, isto é, decompor tais espaços como soma direta de espaços T_k J-invariantes de dimensão 2, $1 \leq k \leq \dim M/2$, podendo identificar a transformação J como o produto pela raiz imaginária i e os vetores $v_i, J(v_i)$, $v_i \in T_i$ como parte real e parte imaginária desse subespaço, tornando assim o espaço tangente real de dimensão $2m$ em um espaço complexo de dimensão m.

Sabe-se que as únicas esferas que podem possuir estrutura quase complexa são limitadas.

Proposição 2 (A. Gray, p. 472 [3])**.** *As únicas esferas com estrutura quase complexas não-degenerado são S^2 e S^6.*

De fato, são conhecidas estruturas quase complexas em S^2 e S^6. Para exemplificar, uma estrutura quase complexa em S^2 é dada por $J_a(v) = a \times v$, em que $a \in S^2$, $v \in T_a S^2$ e $\times$ é o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$ (uma construção semelhante funciona para S^6).

2.2 Paralelismos e o Teorema de Kirchhoff

As estruturas quase complexas também estão associadas a paralelismos em esferas. Tal relação é explicitada no teorema de Kirchhoff, cujo enunciado e demonstração foram obtidos no artigo “A Note on Kirchhoff's Theorem for Almost Complex Spheres I” [4], de Lázaro O. R. Díaz.

Definição 2. *Uma variedade M de dimensão n é paralelizável se existe um sistema de referência (ou referencial) global, isto é, se existem n campos vetoriais suaves $V_1, \ldots, V_n$ tais que, para cada ponto $p \in M$, $\{V_1(p), \ldots, V_n(p)\}$ é uma base do espaço tangente T_pM.*

Note que procurar tais campos equivale a procurar isomorfismos $\sigma_x : \mathbb{R}^{n+1} \to T_x S^{n+1}$, para cada $x \in S^{n+1}$, que variem suavemente em relação ao vetor x. É interessante esboçar a demonstração do teorema de Kirchhoff. A principal ideia da demonstração é decompor os vetores $x \in S^{n+1}$ como combinação linear de um vetor y em S^n com um vetor ortogonal a S^n em R^{n+2} e decompor os vetores $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ como combinação linear de y com um vetor em $T_y S^n$, como pode ser visualizado na figura 1.

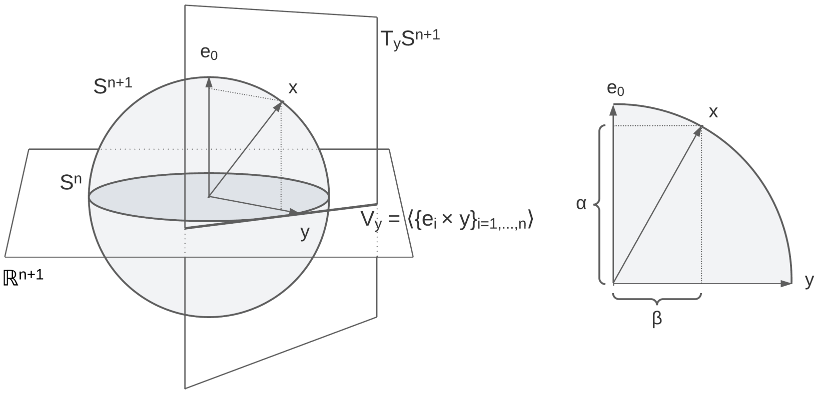

Figura 1: A esfera S^{n+1} decomposta como combinação da esfera S^n com outra dimensão normal. Todo vetor $v \in S^{n+1}$ pode ser escrito como uma combinação linear de vetores $y \in S^n$ e $e_0 \perp S^n$.

Fixado um quadro de referências em e_0, $\sigma_{e_0} : \mathbb{R}^{n+1} \to T_{e_0}S^{n+1}$ levando a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ no quadro descrito é a identidade entre espaços vetoriais. Por outro lado, $\sigma_y : \mathbb{R}^{n+1} \to T_yS^{n+1}$, para $y \in S^n$, pode ser definido como a transformação linear que leva y em $-e_0$ e z em $J_y(z)$, para todo $z \in T_yS^n$. Para os demais valores $x \in S^{n+1}$, toma-se sua decomposição como combinação linear de um vetor $y \in S^n$ com o vetor e_0 e então σ_x é definido como a combinação linear com mesmos coeficientes das transformações σ_{e_0} e σ_y. Restaria mostrar que σ varia suavemente e, a menos de alguns detalhes (profundos, é bem verdade), é o que quase acontece.

Teorema 1 (Kirchhoff)**.** *Se a esfera S^n admite uma estrutura quase complexa, então S^{n+1} é paralelizável.*

Exemplo 1. *Como visto, o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$ gera uma estrutura quase complexa J em S^2. Neste caso, um referencial de S^3 é, então,*

$$V_1(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \qquad V_2(x) = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \qquad V_3(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_4 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Segundo Díaz [4], uma linha de pesquisa se concentra em descobrir se o paralelismo em S^7 obtido através de uma estrutura quase complexa integrável em S^6 resultaria de um grupo de Lie em S^7 que, por sua vez, não pode existir.

2.3 Integrabilidade

Dado espaços tangentes complexificados de uma variedade diferenciável, é natural se questionar se eles definem uma variedade complexa. Dito isto, obter uma variedade a partir de seus espaços tangentes é um exercício de integração e, por isso, é razoável definir que uma estrutura quase complexa J é integrável se os espaços tangentes complexificados são originados de uma variedade complexa.

Definição 3. *Uma estrutura quase complexa J em uma variedade diferenciável M é dita integrável se M possui uma estrutura complexa que induz a estrutura quase complexa J.*

Note que, nestes termos, o problema de Hopf reside em verificar se S^6 possui uma estrutura quase complexa integrável. Uma maneira muito prática de se verificar a integrabilidade de uma estrutura quase complexa é dada pelo tensor de Nijenhuis e pelo teorema de Newlander-Nirenberg. Os resultados aqui apresentados foram obtidos do artigo "A Note on Kirchhoff's theorem for almost complex spheres" [4], de Lázaro O. Rodríguez Díaz.

Definição 4. *Seja J uma estrutura quase complexa de uma variedade diferenciável M. O tensor de Nijenhuis de J em dois campos vetoriais X, Y em M é dado por $N(X,Y) = [X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY]$.*

Teorema 2 (Teorema de Newlander-Nirenberg, [5])**.** *Uma estrutura quase complexa é integrável se, e somente se, o tensor de Nijenhuis dessa estrutura for identicamente nulo.*

Como o tensor de Nijenhuis não é identicamente nulo para a estrutura quase complexa usual de S^6, tem-se por corolário que

Corolário 1. *A estrutura quase complexa de S^6 induzida pelo produto vetorial em $\mathbb{R}^7$ não é integrável.*

2.4 H-espaços

A última estrutura apresentada será a de H-espaço. De fato, se uma esfera é paralelizável então ela é um H-espaço. Este resultado, no entanto, não é muito acessível, sendo mais prático obter as estruturas de H-espaços de S^3 e S^7 a partir das estruturas quase complexas. A seguinte definição de H-espaço foi extraída do livro "Algebraic Topology" [6], de Allen Hatcher.

Definição 5. *Um H**-espaço** é um espaço topológico X equipado com uma aplicação contínua $\rho : X \times X \to X$, chamada de **produto**, e com um elemento $e \in X$ tal que $\rho(e,x) = \rho(x,e) = x$, para todo $x \in X$, chamado de **elemento identidade**.*

Teorema 3. *Seja S^n uma esfera unitária com estrutura quase complexa J. Então S^{n+1} admite uma estrutura de H-espaço.*

Como visto, estruturas quase complexas, produtos vetoriais, H-espaços e álgebras (contínuas) de divisão normada estão intimamente relacionados, de maneira que é possível transitar de uma para outra em quase qualquer sentido. A integrabilidade de S^6, então, pode ser estudada através de algumas dessas estruturas. De fato, segundo Díaz [4], uma linha de estudo do assunto muito interessante é investigar se a integrabilidade de S^6 implicaria, de alguma forma, na existência de um produto homotopicamente associativo em S^7. Isso seria um absurdo, dado o teorema de Ioan Mackenzie James 4 em seu artigo “Multiplication on spheres” [7], o que implicaria na não integrabilidade de S^6.

Teorema 4 ([7], Teorema 1.4)**.** *Não existe produto homotopicamente associativo em S^n exceto para $n = 1$ ou $n = 3$.*

3 CONCLUSÕES:

O problema da existência de estrutura complexa em S^6 mobiliza diversas estruturas geométricas que estão intimamente conectadas. Apesar de ser um problema em aberto, seu estudo proporciona o contato com diversos conceitos e métodos empregados para sua solução, exercendo uma grande contribuição para o desenvolvimento matemático pessoal.

Referências

[1] Hassler Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 645–680, 1936.

[2] Heinz Hopf. Zur topologie der komplexen mannigfaltigkeiten. In *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, volume 167185. Interscience Publishers New York, 1948.

[3] Alfred Gray. Vector cross products on manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 141:465–504, 1969.

[4] Lázaro O. R. Díaz. A note on kirchhoff’s theorem for almost complex spheres i, 2018.

[5] August Newlander and Louis Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 391–404, 1957.

[6] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[7] IM James. Multiplication on spheres. ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, 84(2):545–558, 1957.