MONOTONICIDADE DOS PREÇOS DE OPÇÕES COM RESPEITO À VOLATILIDADE

Palavras-chave: Equações Diferenciais Estocásticas, Finanças, Teoria de Probabilidades

Autores:
ADAIR ANTONIO DA SILVA NETO [IMECC - UNICAMP][1]
PROF. DR. DIEGO SEBASTIÁN LEDESMA (ORIENTADOR) [IMECC - UNICAMP]

Introdução

Neste trabalho, mostraremos que o preço de uma opção de compra europeia é uma função crescente da volatilidade. Para isso, considere um mercado contendo um ativo livre de risco com preço $S_t^0 = e^{rt}$ no tempo t, taxa de juros r; e um ativo arriscado com preço S_t no tempo t. Assumimos que S_t é modelado por um processo estocástico (S_t) que é solução da seguinte equação diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t) S_t dB_t \tag{1}$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o **drift** e $(\sigma(t))$ é a **volatilidade** da ação S_t. Neste caso, $\sigma(t)$ é um processo adaptado com respeito à filtração natural de (B_t) satisfazendo a desigualdade $\sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_2$ para todo $t \in [0, T]$, com $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

Nesse contexto, considere uma opção de compra (call) europeia com maturidade T e preço de exercício (strike) K. Se $\sigma(t) = \sigma$ para todo t (é constante), então o preço da call no tempo t é dado por $C(t, S_t)$, em que a função $C(t,x)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial C}{\partial x}(t,x) - rC(t,x) = 0, & t \in [0,T),\ x > 0 \\ C(T,x) = \max\{x - K,\ 0\} \end{cases} \tag{2}$$

Denote por C_i a função C correspondendo ao caso $\sigma = \sigma_i$, para $i = 1, 2$. Mostraremos que o preço da call no tempo 0 no modelo de volatilidade variável $\sigma(t)$ pertence a $[C_1(0, S_0),\ C_2(0, S_0)]$.

Metodologia

Para estudar esse problema, listamos alguns resultados preliminares. Começamos apresentando o modelo de Black-Scholes.

Seja S_t um ativo arriscado e S_t^0 um ativo livre de risco tal que

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

em que $r \geq 0$ é a taxa de juros instantânea.

[1]Pesquisa apoiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Processo número 2023/08064-0.

Definindo $S_0^0 = 1$, temos que $S_t^0 = e^{rt}$. Assumimos que o preço da ação é determinado pela equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{3}$$

em que $\mu > 0$ é o **drift**, e σ é a **volatilidade** da ação.

Teorema 1. A solução de (3) é dada por

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) \tag{4}$$

O próximo resultado nos dá uma solução explícita para a precificação de opções no modelo de Black-Scholes.

Teorema 2. O valor da opção V_t pode ser expressado como $V_t = F(t, S_t)$, onde

$$F(t,x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r\theta}\Phi(d_2)$$

para uma opção de compra e

$$F(t,x) = Ke^{-r\theta}\Phi(-d_2) - x\Phi(-d_1)$$

para uma opção de venda (put), em que $\Phi(x), d_1$ e d_2 são dadas por

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du$$

e

$$d_1 = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta} = \frac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

Teorema 3 (Girsanov)**.** Seja (θ_t) um processo adaptado satisfazendo $\int_0^T \theta_s^2\, ds < \infty$ q.c. e tal que o processo (L_t) definido por

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)$$

é um martingale.

Então, sobre a probabilidade $\mathbb{P}^L$ com densidade L_T com respeito a $\mathbb{P}$, o processo (W_t) dado por $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s\, ds$ é um movimento Browniano sobre $(\mathfrak{F}_t)$.

Teorema 4. Qualquer opção definida por uma variável aleatória não negativa e $\mathfrak{F}_T$-mensurável h em $L^2(\mathbb{P}^*)$ é replicável (no modelo de Black-Scholes).

O valor, no tempo t, de qualquer portfolio replicante é dado por

$$V_t = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}h \,\middle|\, \mathfrak{F}_t\right]$$

Assim, o valor da opção em t pode ser naturalmente definido por $\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}h \,\middle|\, \mathfrak{F}_t\right]$.

Resultados e Discussão

A demonstração é dividida em oito subprovas, começando por seis lemas e, com esses lemas, vamos mostrar que $C_1(0, S_0) \le C_0 \le C_2(0, S_0)$. Neste resumo, apresentamos um esboço das demonstrações.

Lema 5. As funções $x \longmapsto C_i(t,x)$, para $i = 1,2$, são convexas.

Demonstração. Usando a proposição 2 com $C_i(t,x) = F(t,x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \Phi(d_1) + x\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial x} - Ke^{-r\theta}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial x} \tag{5}$$

Calculando $\Phi'(d_1)$, temos

$$\Phi'(d_1) = \Phi'(d_2)\frac{K}{xe^{r\theta}}$$

Substituindo em $\frac{\partial F}{\partial x}$ e derivando novamente,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{x\sigma\sqrt{\theta}}$$

Como a expressão acima é positiva, a função é convexa. □

Lema 6. A solução da equação diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t) S_t dB_t$$

é dada por

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\ ds + \int_0^t \sigma(s)\ dB_s\right)$$

Demonstração. Seja $dS_t = S_t dY_t$ com $dY_t = \mu dt + \sigma_t dB_t$. Note que

$$Y_t = \int_0^t \mu\ ds + \int_0^t \sigma_s\ dB_s$$

Aplicando a fórmula de Itô a $S_t = g(t, Y_t)$ e comparando a $dS_t = S_t dY_t$, temos o resultado. □

Lema 7. Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ sobre a qual o processo

$$W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma_s}\ ds$$

é um movimento Browniano canônico sobre $\mathbb{P}^*$.

Demonstração. Pela fórmula de Itô, verificamos que

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma_s}\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma_s}\right)^2\ ds\right)$$

é um martingale. Assim, aplicando o teorema de Girsanov a $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma_s}$ obtemos o desejado. □

Lema 8. O preço da call no tempo 0 é dado por

$$C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-rT}\max\{S_T - K,\ 0\}]$$

Demonstração. Segue do Teorema 4 com $t = 0$. □

Lema 9. Seja $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$. Então $\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t^2] \leq S_0^2 e^{\sigma^2 t}$.

Demonstração. Usando que $dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t$, aplicamos a fórmula de Itô a $\tilde{S}_t = g(t, S_t)$, em que $g(t,x) = e^{-rt}x$, e obtemos

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma_t dB_t] \tag{6}$$

Como $W_t = B_t + \int_0^t \frac{(\mu-r)u}{\sigma_u} du$, temos que $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma_t dW_t$ e, assim, $\tilde{S}_t$ é um $\mathbb{P}^*$-martingale.

Aplicando a fórmula de Itô novamente e observando que $d[S_t, S_t] = S_t^2 \sigma_t^2 dt$, temos que

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t^2] = S_0^2 + \int_0^t \mathbb{E}^*[S_u^2]\sigma_u^2 \, du$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}_t^2] \leq S_0^2 e^{\int_0^t \sigma_u^2 \, du}$$

Por fim, como $\sigma_t < \sigma$, temos o desejado. □

Lema 10. O processo definido por

$$M_t = \int_0^t e^{-ru} \frac{\partial C_1}{\partial x}(u, S_u)\sigma_u S_u \, dW_u$$

é um martingale sobre a medida de probabilidade $\mathbb{P}^*$.

Demonstração. Note que e^{-ru} é limitado, porque $u \geq 0$, $r \geq 0$, σ_u é limitado por hipótese, e S_u é limitado (pelo lema anterior). Pelo Lema 5, sabemos que $\frac{\partial C_1}{\partial x} = \Phi(d_1)$ é limitado. Logo, M_t é uma integral de Itô e, assim, M_t é um $\mathbb{P}^*$-martingale. □

Teorema 11. O processo $(e^{-rt}C_1(t, S_t))$ é um submartingale sobre $\mathbb{P}^*$. Além disso, $C_1(0, S_0) \leq C_0$.

Demonstração. Pela fórmula de Itô,

$$dX_t = \left(-re^{-rt}C_1(t, S_t) + e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial t}(t, S_t)\right)dt + e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}e^{-rt}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t, S_t)(dS_t)^2$$

Substituindo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t$, $(dS_t)^2 = \sigma_t^2 S_t^2 dt$ e organizando, temos

$$\begin{aligned} dX_t = e^{-rt}&\left(-rC_1(t, S_t) + \frac{\partial C_1}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t, S_t)\right)dt \\ &+ e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)\sigma_t S_t dB_t \end{aligned} \tag{7}$$

Da demonstração do Lema 9, sabemos que $\sigma_t dB_t = \sigma_t dW_t - (\mu - r)dt$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)S_t\sigma_t dB_t &= e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)S_t(\sigma_t dW_t - (\mu - r)dt) \\ &= e^{-rt}\sigma_t S_t \frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)dW_t - e^{-rt}S_t(\mu - r)\frac{\partial C_1}{\partial x}(t, S_t)dt \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7),

$$dX_t = e^{-rt}\left(-rC_1(t,S_t) + \frac{\partial C_1}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial C_1}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t)\right)dt$$
$$+ e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t,S_t)\sigma_t S_t dW_t$$

Agora escrevemos

$$dX_t = e^{-rt}\left(-rC_1(t,S_t) + \frac{\partial C_1}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial C_1}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_t^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t)\right)dt$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma_t^2 - \sigma_1^2)S_t^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t)dt + e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t,S_t)\sigma_t S_t dW_t$$

Pela equação (2), temos

$$dX_t = \frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma_t^2 - \sigma_1^2)S_t^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t)dt + e^{-rt}\frac{\partial C_1}{\partial x}(t,S_t)\sigma_t S_t dW_t \tag{9}$$

Como $C_1(t,x)$ é uma função convexa de x (pela Lema 5), $\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t) > 0$, e usando que $\sigma(t) > \sigma_1$, temos que $(\sigma_t^2 - \sigma_1^2) > 0$. Portanto, $\frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma_t^2 - \sigma_1^2)S_t^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}(t,S_t) > 0$.

Pelo Lema 10, $\int_0^t e^{-ru}\frac{\partial C_1}{\partial x}(u,S_u)\sigma_u S_u \, dW_u$ é um $\mathbb{P}^*$-martingale. Assim, $\mathbb{E}^*[X_t \mid \mathfrak{F}_u] \geq X_u$.

Por fim, pelo Lema 8,

$$e^{-r0}C_1(0,S_0) = C_1(0,S_0) \leq \mathbb{E}^*[e^{-rT}C_1(T,S_T) \mid \mathfrak{F}_0] = C_0$$

□

Teorema 12. $C_0 \leq C_2(0,S_0)$.

Demonstração. Análoga à última demonstração. Verificamos que $e^{-rt}C_2(t,S_t)$ é um supermartingale e, assim, $C_0 = \mathbb{E}^*[e^{-rT}C_2(T,S_T) \mid \mathfrak{F}_0] \leq C_2(0,S_0)$. □

Combinando os últimos dois teoremas, temos que $C_1(0,S_0) \leq C_0 \leq C_2(0,S_0)$, como queríamos.

Conclusões

Mostramos que o preço de uma opção de call europeia no tempo 0 no modelo de volatilidade variável pertence ao intervalo $[C_1(0,S_0),\ C_2(0,S_0)]$. De fato, o preço da opção de compra é uma função crescente da volatilidade.

Referências

[LL11] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. CRC press, 2011.

[Oks13] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.