



INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA E MEDIDAS DO ESPECTRO DE POTÊNCIA ANGULAR

Palavras-chave: COSMOLOGIA, RELATIVIDADE GERAL, ESPECTRO DE POTÊNCIA

Autores:

GUSTAVO HENRIQUE MAGRO [Unicamp]
Profa. Dra. FLÁVIA SOBREIRA (orientadora) [Unicamp]

I Introdução

O objetivo de nosso estudo é introduzir os fundamentos da cosmologia de *background* e estudarmos uma das técnicas estatísticas utilizadas experimentalmente na cosmologia contemporânea. Nesse sentido esse trabalho mistura uma introdução teórica profunda e detalhada com a introdução à uma ferramenta avançada utilizada na prática em um campo de grande interesse como a cosmologia.

O estudo teórico apresentado aqui contempla conceitos avançados de relatividade especial, relatividade geral, o princípio cosmológico, equações de Friedmann e suas soluções. Na área prática, apresentamos noções da teoria de espectros de potência e apresentamos uma medida para um catálogo de galáxias fornecido pela colaboração *Dark Energy Survey* (DES). O texto base inicial utilizado foi *Cosmology 2021* de Daniel Baumann, porém para certas áreas utilizamos extensivamente *Spacetime and Geometry* de Sean Carroll. Para a parte prática, os conceitos foram retirados de *The Large-Scale Structure of the Universe* de P.J.E. Peebles.

II Relatividade Especial

A relatividade especial ou restrita formulada por Albert Einstein constitui uma nova maneira de tratarmos a dinâmica de partículas, especialmente para velocidades próximas a da luz. Nesta teoria Einstein descreve o comportamento de partículas quando restritas a uma região pequena do espaço, onde efeitos da gravidade podem ser ignorados.

Os fundamentos e resultados de tal teoria são amplos e não os trataremos aqui, apesar de terem sido objeto de estudo dessa iniciação. Nessa seção trabalharemos então conceitos usualmente não abordados e que são essenciais. Sob a relatividade especial trabalhamos com o chamado espaço de *Minkowski*. Esse espaço possui dimensão 4, três dimensões para as direções espaciais e 1 dimensão para o tempo, $\{ct, x, y, z\}$, em que c é a velocidade da luz. No espaço de Minkowski definimos um tensor métrico ou uma métrica por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1)$$

Onde utilizamos a notação de Einstein e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ são componentes do nosso tensor métrico. Dentro do espaço de Minkowski vivem os quadri-vetores ou 4-vetores, vetores que

são invariantes quando realizamos uma transformação de coordenadas usando as transformações de Lorentz. Um 4-vetor particularmente importante é a 4-velocidade e o 4-momento, com eles podemos definir um objeto dito tensor de momento-energia $T_{\mu\nu}$. Esse tensor descreve uma distribuição de partículas como um fluido e cada componente representa um fluxo de 4-momento em uma determinada direção constante do espaço-tempo. O fluxo da componente temporal do 4-momento na direção de tempo constante é a densidade de energia. Já o fluxo das componentes espaciais do 4-momento em suas respectivas direções constituem a pressão exercida.

Para a cosmologia uma forma particularmente importante do tensor momento energia é a forma de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P\eta_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Essa forma diagonal descreve um fluido em repouso de densidade de energia ρ e pressão P , com 4-velocidade U_μ e se será relevante mais à frente. A relatividade especial constitui um fundamento importante da cosmologia, porém, por ser restrita a um local do espaço, não fornece o material para descrevermos o universo como um todo. Tal descrição é atingida pela relatividade geral.

III Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral foi desenvolvida por Einstein. Tal teoria generaliza a relatividade especial e formula uma nova descrição da gravidade.

A necessidade da descrição da gravidade surge da observação de que essa não se comporta como uma força natural comum. Podemos observar diferenças na natureza da gravidade ao notarmos que objetos em queda livre sob ação exclusiva de um campo gravitacional, em regiões pequenas o suficiente, sofrem a mesma aceleração. Tal fato, observado por Galileu, é resultado do Princípio de Equivalência de Einstein, que diz:

Princípio de Equivalência de Einstein (EEP, em inglês). *Em regiões pequenas o suficiente, as leis da física se reduzem aquelas da relatividade especial, isto é, é impossível detectar a existência de um campo gravitacional apenas por experimentos locais.*

É esse princípio que nos sugere ainda a natureza da gravidade. Usando seu princípio, Einstein chegou a conclusão de que a gravidade é na verdade a deformação do espaço-tempo, isto é, a curvatura do espaço-tempo. Identificando o movimento de um corpo em queda-livre com o movimento feito por um corpo seguindo uma geodésica, a curva que minimiza a distância entre dois pontos.

A teoria da relatividade geral se baseia fortemente nos conceitos da geometria Riemanniana. Nesse contexto, formas geométricas de altas dimensões são ditas *variedades*. O espaço-tempo é uma variedade equipada com algumas estruturas, sendo dito variedade pseudo-riemanniana lorentziana. A curvatura de uma variedade pode ser medida em relação à uma métrica pseudo-riemanniana atribuída ao espaço-tempo. Einstein formulará suas Equações de Campo de Einstein (EFE, em inglês) de forma que, energia e momento geram curvaturas no espaço tempo e essas curvaturas nos devolvem uma métrica, da qual podemos calcular geodésicas e a dinâmica dos corpos. As EFE utilizam como medida de curvatura o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e o escalar de Ricci, R e como medida de energia e momento o tensor de momento-energia, $T_{\mu\nu}$, de forma que escrevemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Essas equações formam um conjunto de até 6 equações independentes. Para resolvê-las podemos utilizar uma certa distribuição de momento e energia e obtermos uma métrica. Podemos também utilizar uma métrica e uma distribuição correspondente e utilizarmos as EFE para descrever o comportamento de um parâmetro importante. É justamente isso que é feito na cosmologia.

IV O Princípio Cosmológico

Ao observarmos distâncias maiores que 500 milhões de anos-luz ($\approx 100 \text{ Mpc} \cdot h^{-1}$) observamos uma semelhança entre diferentes partes do céu, isso levou cosmólogos a postularem o chamado *Princípio Cosmológico*:

Princípio Cosmológico. *Em grandes escalas, o universo é espacialmente o mesmo em todos os pontos, isto é, o universo é homogêneo e isotrópico em relação às suas dimensões espaciais.*

O princípio cosmológico apesar de parecer simples nos fornece uma grande quantidade de informação. A homogeneidade e isotropia se referem ao fato de que ao trasladarmos pelo universo e (ou) olharmos em qualquer direção, sua estrutura em larga escala permanece a mesma. Da matemática, essas duas informações nos dizem que há um número limitado de variedades espaço-tempo, as quais são homogêneas e isotrópicas: o próprio espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , a três-esfera S^3 e o três-hiperboloide \mathbb{H}^3 .

De cada um desses espaço-tempo podemos obter uma métrica, ao imergir cada uma dessas formas em um espaço de Minkowski de dimensão 4. Imersas, usamos a ferramenta do *pullback* mapeando esses espaços usando coordenadas esféricas e hiperbólicas. O resultado é a chamada métrica **FLRW**, nomeada em homenagem aos físicos Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}} + \underbrace{r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}_{r^2 d\Omega^2} \right]. \quad (4)$$

Dentro dessa complexa forma $\{ct, r, \theta, \phi\}$ simbolizam as coordenadas que mapeiam o espaço-tempo. O fator $k \in \{-1, 0, 1\}$ representa cada uma das 3 formas possíveis. Se $k = -1$ temos o hiperboloide com a geometria dita **aberta** e curvatura negativa. Se $k = 0$ temos o espaço de Minkowski com geometria **plana**. Se $k = 1$ temos a geometria esférica, **fechada**, com curvatura positiva. O fator $a(t)$ é chamado de *fator de escala* e nos dirá a proporção adimensional da expansão do universo.

Um segundo resultado do princípio cosmológico é também a distribuição de um fluido homogêneo e isotrópico, sendo essa compatível com a descrição de um fluido perfeito, o qual possui pressão isotrópica em todos os pontos, o que implica homogeneidade.

V As Equações de Friedmann

Em 1929, Edwin Hubble observou que a luz de certas "galáxias" pareciam estar deslocada para o espectro infravermelho, um fenômeno conhecido como *redshift*. Hubble atribuiu esse redshift a um afastamento que galáxias longes da Terra sofriam. Quanto mais longe da Terra, mais rápido era a velocidade de recessão, tal resultado é também conhecido como a *Lei de Hubble*. Usando o princípio cosmológico percebemos que esse afastamento deve ocorrer *em todo* o universo, o que nos leva à conclusão de que o próprio tecido do espaço-tempo está em expansão. Tal conclusão já era prevista por Einstein, Friedmann e alguns outros, apesar de muitos não advocarem por ela.

Essa expansão é modelada pelo fator de escala adimensional $a(t)$, usando que $a(t_0 = \text{hoje}) = 1$, ele nos diz a proporção do universo em cada instante t de tempo em relação ao tamanho atual. Assim, usando a métrica FLRW deduzimos os componentes do tensor de Ricci e usando o tensor momento-energia de um fluido perfeito, compatível com a métrica FLRW, resolvemos as equações de Einstein. Tais soluções são ditas *equações de Friedmann*:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \quad (5)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \quad (6)$$

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Podemos encontrar soluções exatas para $a(t)$ usando a equação de estado para fluidos barotrópicos $P = w\rho c^2$, onde $w \in \{-1, 0, \frac{1}{3}\}$ para os fluidos de energia escura (Λ), matéria (m) e radiação (r), respectivamente. Assim, encontraremos soluções para universos feitos de um único fluido. Usando a equação diferencial 7 temos que $\rho = a^{-3(1+w)}$, substituindo em 5 e resolvendo podemos isolar $a(t)$:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(w+1)}, & \text{se } w \neq -1 \\ e^{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t}, & \text{se } w = -1. \end{cases} \quad (8)$$

Assim, tomando os modelos de universo plano $k = 0$. Temos o universo dominado por radiação que possui $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$ descrevendo bem um universo jovem. O universo de De Sitter preenchido apenas com energia escura $a(t) = e^{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t}$ descrevendo bem o universo tardio. E finalmente, o universo dominado por matéria onde $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ também conhecido como universo de Einstein-de Sitter que descreve bem o período entre o universo dominado por radiação e o dominado por energia escura. Esses universos foram utilizados durante muito tempo como base teórica para a cosmologia de *background*, sendo aperfeiçoados usando teoria de perturbações.

VI Espectro de Potência Angular

Uma das ferramentas utilizados pela cosmologia contemporânea para verificar hipóteses é a contagem de pares de objetos próximos em regiões do espaço. Seu objetivo é analisar as heterogeneidades do espaço e assim obter parâmetros importantes. Tal contagem pode ser estimada usando catálogos de galáxias gerados por colaborações e ferramentas estatísticas. Uma das ferramentas utilizadas, se dá pela técnica estatística da função de correlação angular $w(\theta)$, onde θ representa a separação angular entre dois objetos do catálogo. A função $w(\theta)$ é definida em termos do excesso de probabilidade conjunta de encontrarmos objetos em diferentes pedaços do céu.

Catálogos de galáxias podem ser obtidos como resultado de colaborações que mapeiam o céu. Em geral, para cada objeto no catálogo é atribuído suas coordenadas em termos da ascensão reta (RA) e da declinação (DEC), coordenadas do sistema equatorial celeste. Nesse sistema mapeamos a superfície de uma esfera em termos da posição angular relativa ao equador celeste e ao ponto vernal.

Podemos ainda aplicar uma transformada esférica de Fourier em $w(\theta)$. Tal transformada nos revela informações sobre os sinais fundamentais que compõem nossa função. A média normalizada dos coeficientes dessa expansão são ditos o espectro de potência angular e são simbolizados por Cl 's, cada Cl é dado em função de um multipolo l que estão relacionados a expansão da função $w(\theta)$. Nesse trabalho nosso objetivo foi adquirir noções de como a medida do espectro de potência é feito e medi-lo para um catálogo de galáxias. Para as medidas utilizamos um código fornecido pela colaboração *Dark Energy Survey (DES)* que utiliza o pacote de funções *NaMaster*. Tal pacote utiliza o método de Pseudo- Cl 's para estimar o espectro de potência.

Ao escrevermos esse resumo estamos na fase de teste de produção de espectros de potência. Mostraremos então, a exemplo do objetivo final, um espectro de potência obtido, porém deve ser visto apenas como uma implementação teste. Para essa realização utilizamos dados fornecidos pelo lançamento de dados do ano 1 (Y1) da colaboração DES. O catálogo escolhido foi o *redMaGiC* que é composto por aproximadamente 700 mil galáxias luminosas vermelhas que foram selecionadas do catálogo principal através do algoritmo *redMaGiC* e combinadas com técnicas de lentes fracas. Desse catálogo selecionamos os objetos com redshifts $0.55 < z < 0.9$ com objetivo de compararmos nossos resultados com Camacho et. all, 2018. O resultado aplicando o código *NaMaster* pode ser visto na figura 1.

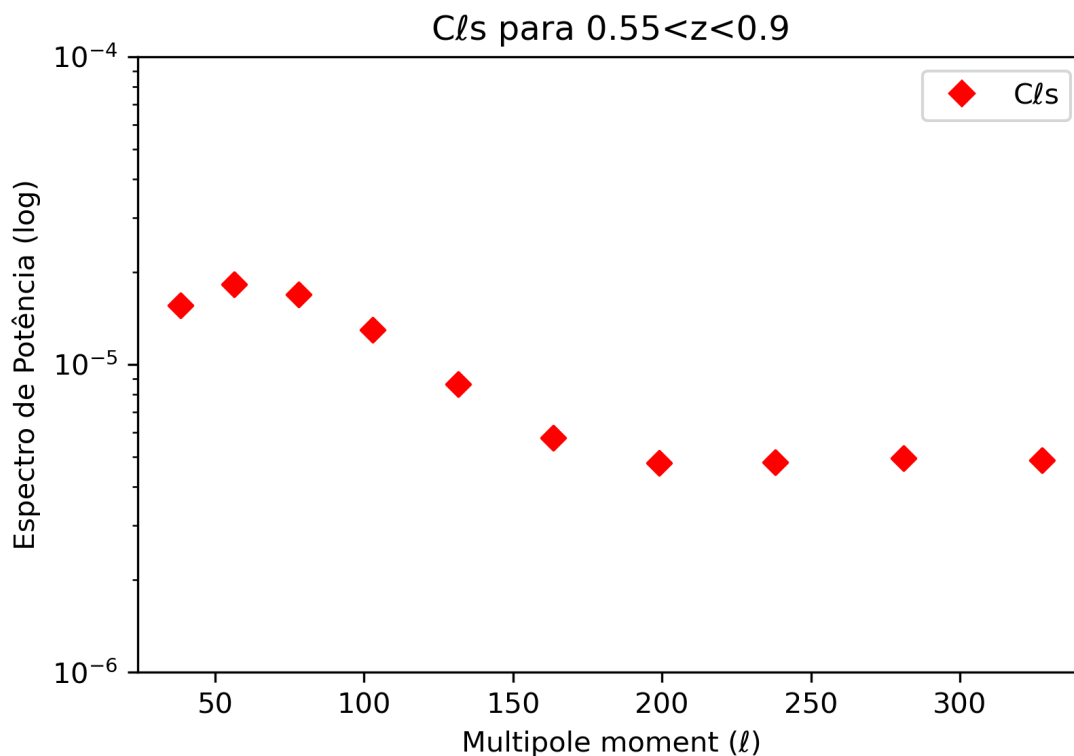


Figura 1: Espectro de Potência Angular obtido de uma função de autocorrelação aplicada ao catálogo redMaGiC dos dados do ano 1 da colaboração DES. No eixo vertical temos os Cl 's em escala logarítmica. No eixo horizontal temos os multipolos da expansão.

No trabalho de Camacho, 2018, o autor utilizou o catálogo principal do ano 1 do DES, que contém todas as galáxias analisadas pela colaboração e computou o Cl 's para a distribuição inteira. Utilizamos esse artigo como referência para verificarmos nossos cálculos. A saber, a região de referência pode ser encontrada no artigo na figura 2 na região $0.7 < z_{ph} < 0.8$. Para essa implementação ainda restou calcularmos as barras de incerteza de cada medida. Essas barras são computadas utilizando catálogos gerados computacionalmente com distribuições homogêneas. Essa última etapa ainda está sob desenvolvimento para esse trabalho.

VII Conclusão

A pesquisa realizada permite a iniciação em âmbito científico teórico e prático na área de cosmologia. Ao estudar tais conceitos, é possível adquirir um panorama amplo sobre a pesquisa na dita área. A formação de cosmólogos representa um importante setor na pesquisa acadêmica, visto que, a cosmologia passa por um período de descobertas científicas quase diárias, portanto, fomentar essa área de pesquisa em nosso país significa colocar nossa produção acadêmica em alto nível.

VIII Bibliografia

- [1] Baumann, D. (2021). Cosmology. University of Amsterdam. Amsterdam.
- [2] Carroll, S. (2019). Spacetime and Geometry. University of Cambridge. Cambridge.
- [3] Camacho, et al. (2018) Dark Energy Survey Year 1 Results: Measurement of the Galaxy Angular Power Spectrum. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1807.10163>
- [4] Peebles, P. (2020). The Large-Scale Structure of the Universe. University of Princeton. Princeton.