



RADIAÇÃO HAWKING E MODELOS ANÁLOGOS

Palavras-chave: Buracos Negros, Radiação Hawking, Modelos Análogos

Autores:

FELIPE ALBERTO BUTZKE - IFGW

Prof. Dr. JOÃO PAULO PITELLI MANOEL - IMECC

1 Introdução

A ideia de temperatura para um buraco negro surge a partir da relação de entropia proposta por Bekenstein [1], que correlaciona a área de um buraco negro com sua entropia, evitando assim a violação da Segunda Lei da Termodinâmica. Para que isso seja consistente com a Primeira Lei da Termodinâmica, é necessário que um buraco negro possua uma temperatura associada.

Inicialmente, acreditava-se que um buraco negro não poderia ter uma temperatura devido à sua capacidade de impedir que a luz escapasse, o que implicava que não haveria uma Lei de Planck aplicável a ele e, portanto, não haveria uma temperatura definida. Essa visão era baseada na noção clássica de um buraco negro como um objeto completamente inacessível e isolado do restante do universo.

No entanto, a descoberta de Hawking [2,3] trouxe uma nova compreensão. Hawking percebeu que, devido a efeitos quânticos próximos ao horizonte de eventos do buraco negro, ocorre uma radiação térmica emitida pelo próprio buraco negro. Essa radiação, conhecida como Radiação Hawking, é análoga a um espectro térmico e está relacionada à temperatura do buraco negro.

Para estudar a Radiação Hawking e investigar suas propriedades, são utilizados modelos análogos, como o uso de fluidos em movimento. Esses modelos permitem simular as características da radiação Hawking e observá-la experimentalmente. Por meio desses modelos análogos, é possível obter percepções sobre a natureza da radiação Hawking e explorar suas implicações em relação à questão transplanckiana.

Portanto, o objetivo dessa pesquisa era familiarizar o aluno com os estudos sobre os modelos análogos baseados em fluidos, os quais oferecem uma abordagem promissora para investigar e observar a Radiação Hawking. Esses modelos análogos fornecem uma maneira de explo-

rar as propriedades da radiação Hawking, contribuindo para uma melhor compreensão dos buracos negros, da teoria quântica de campos e da gravidade em condições extremas.

2 Metodologia

Primeiramente, é importante definir o conceito de vácuo. Ao trabalharmos com partículas de luz e buscarmos uma compreensão relacionada à temperatura, é mais adequado utilizar a noção de vácuo na Teoria Quântica de Campos. Nesse contexto, utilizamos a notação dos operadores de criação (a^\dagger) e de aniquilação (a), nos quais o operador de aniquilação aplicado ao estado fundamental aniquila todas as partículas presentes. Em outras palavras, temos

$$a_k |0\rangle \equiv 0 \quad \text{para todo } \mathbf{k}. \quad (1)$$

Em um espaço curvo com a presença de um buraco negro, a preferência na definição do vácuo é perdida devido à perda de invariância pelas transformações de Lorentz. Isso significa que não temos preferência em relação a um observador acelerado, em comparação com outro observador em “queda livre” em direção ao buraco negro. Consequentemente, não é possível privilegiar os modos de frequência e os operadores de criação e aniquilação entre observadores, tornando difícil determinar qual observador está observando partículas ou não. Essa perda de invariância distingue o espaço curvo do espaço de Minkowski, onde o vácuo era bem definido, uma vez que a preferência de modos era estabelecida por um observador inercial que preservava a invariância de Lorentz.

A ideia proposta por Hawking [2,3] é definir os modos no passado, antes da existência do buraco negro, em uma região distante da estrela em colapso (em \mathcal{I}^-), onde o espaço é assintoticamente plano e bem definido em todo

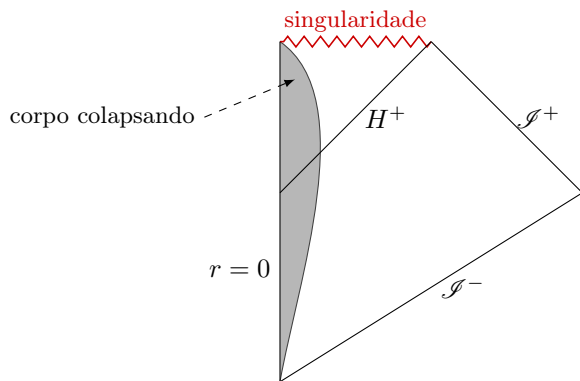


Figura 1: Diagrama de Penrose representando o colapso de um corpo esférico que produz um buraco negro. A singularidade do buraco negro está localizada na parte superior do diagrama, destacada por uma linha vermelha. A origem da métrica encontra-se no lado esquerdo. É importante salientar que a métrica de Schwarzschild é aplicável apenas ao espaço fora da área em cinza, onde o colapso do corpo não está presente. O horizonte de eventos é representado pela linha identificada com H^+ . Este diagrama é inspirado no artigo original de Hawking [3] e recriado a partir de [4].

o seu domínio. No entanto, para descrever todo o espaço no futuro, após a formação do buraco negro, são necessários dois conjuntos de modos. Nesse caso, o horizonte de eventos (H^+) divide o espaço em duas regiões: uma dentro do horizonte de eventos e outra fora dele (\mathcal{S}^+). A estrutura causal da formação de um buraco negro pode ser visualizada na Figura 1, na qual é possível observar a divisão do espaço devido à presença do horizonte de eventos.

Observe que o vácuo definido inicialmente na região passada (\mathcal{S}^-) é necessariamente diferente do vácuo definido na presença de um horizonte de eventos, pois certos modos podem ficar aprisionados na região do horizonte de eventos sem possibilidade de interação com a região \mathcal{S}^+ . Portanto, ao calcularmos os coeficientes de aniquilação e criação no futuro (\mathcal{S}^+) no estado de vácuo do passado (\mathcal{S}^-), o número de partículas não será mais nulo, ou seja,

$$\langle 0_{\mathcal{S}^-} | a_{\mathcal{S}^+} a_{\mathcal{S}^+}^\dagger | 0_{\mathcal{S}^-} \rangle \neq 0, \quad (2)$$

pois os coeficientes que definem o vácuo no futuro não definem mais um vácuo no passado, devido a ausência de certos modos. De acordo com os cálculos realizados por Hawking, os coeficientes estão relacionados de tal forma que o número de partículas observadas em \mathcal{S}^+ segue a estatística de Bose-Einstein, onde

$$n_\Omega = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}, \quad (3)$$

sendo ω a frequência da onda e κ a gravidade superficial do buraco negro. Para um buraco negro de Schwarzs-

child¹, onde $\kappa = c^4/4GM$, a temperatura de Hawking é dada por

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi MGk_B}, \quad (4)$$

onde M é a massa do buraco negro, G a constante universal da gravitação, \hbar a constante de Planck reduzida, c a velocidade da luz e k_B a constante de Boltzmann.

No entanto, surge um problema: a temperatura associada aos buracos negros de massa solar, que já são difíceis de observar no universo, é em torno de $T_H \approx 6.2 \times 10^{-8}$ K. Isso significa que é extremamente desafiador observar a temperatura de buracos negros massivos devido à sua temperatura muito baixa em comparação com a temperatura da radiação cósmica de fundo, que é de aproximadamente $T_{CMB} \approx 2.72$ K.

Outra questão que ainda permanece incerta é a questão transplanckiana da radiação Hawking. Ao retrocedermos no tempo, veremos que as frequências das ondas próximas ao buraco negro tornam-se extremamente altas, da ordem de e^{10^4} [5], o que implica em energias ($E = \hbar\omega$) muito elevadas, superiores à massa do universo. Esse fenômeno é conhecido como problema transplanckiano.

Contudo, Unruh [6] percebeu a possibilidade de ondas sonoras em fluidos se comportarem de maneira análoga aos campos em espaços curvos, desde que o fluido possua certas características em seu fluxo. Quando essas características são satisfeitas, observa-se que as ondas obedecem a uma relação de dispersão [7] na qual a velocidade de grupo depende do comprimento de onda:

$$(\omega + Vk)^2 = c^2(k)k^2, \quad (5)$$

onde ω é a frequência da onda, V é a velocidade do fluxo do fluido, k é o vetor de onda e $c(k)$ é a velocidade de fase da onda no referencial do fluido. A velocidade de grupo é dada por $d\omega/dk = V \pm d(c(k)k)/dk$.

Posteriormente, Unruh [5] também observou que fluidos, devido à sua natureza atômica, possuem um limite natural para as frequências altas. Isso significa que, se fosse possível estimular a radiação Hawking em fluidos, seria plausível que a radiação Hawking sobrevivesse mesmo sem a presença das altas frequências transplanckianas. Essa característica dos fluidos oferece uma perspectiva interessante para o estudo da radiação Hawking e tem motivado pesquisas sobre a possibilidade de observá-la em sistemas análogos.

Dessa forma, representar o número de partículas por meio dos coeficientes de Bogoliubov [9], que indicam as amplitudes dos modos observados, nos proporciona uma noção mais precisa de como as ondas estão se comportando, permitindo uma análise mais completa do espectro de ondas, incluindo no caso hidrodinâmico o comportamento das ondas que não compõem a emissão estimulada de partículas. A relação entre os modos de entrada

¹Um buraco negro de Schwarzschild é um buraco negro estático, que também não possui rotação e carga

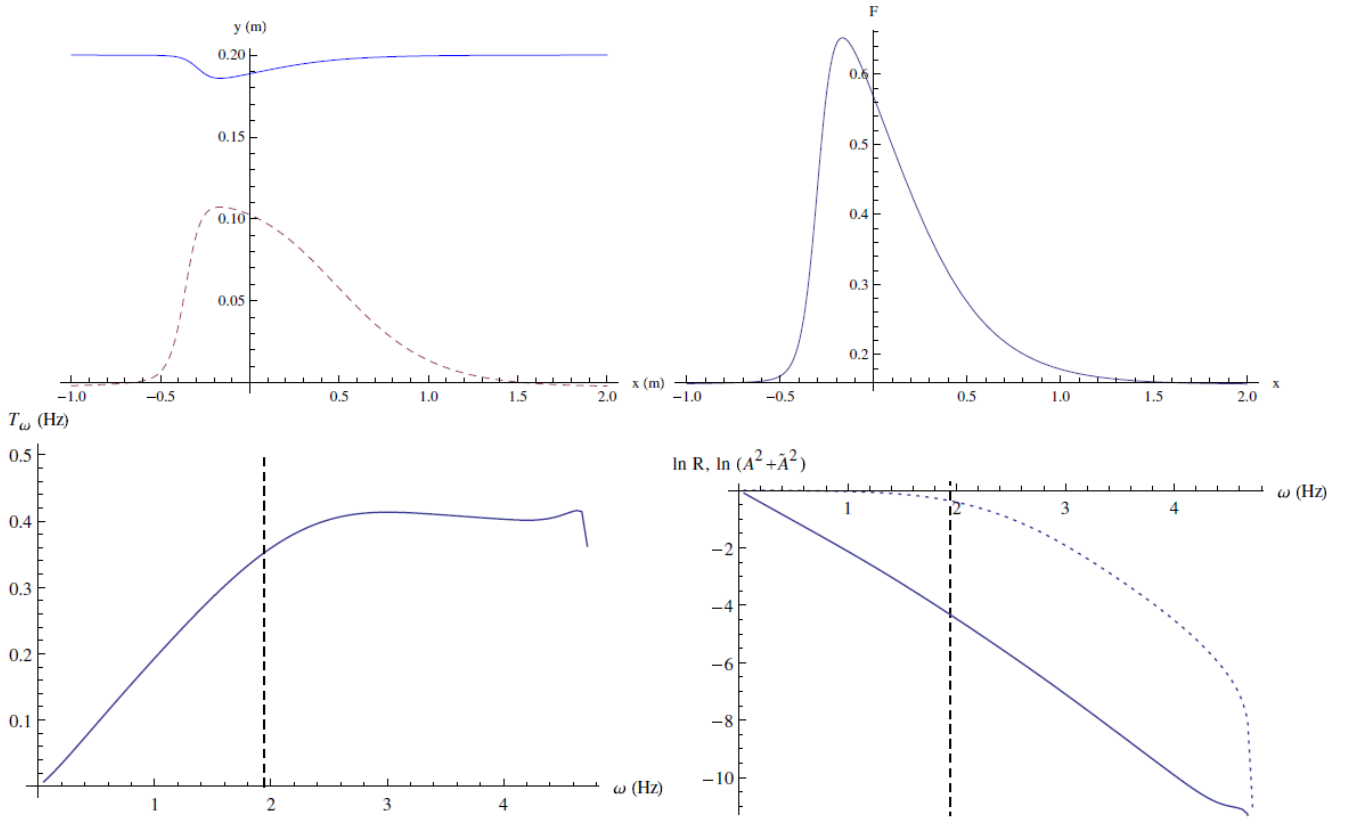


Figura 2: **Topo, cima:** Superfície do líquido (sólido) e obstáculo (tracejado) do experimento [8]. **Topo, direita:** Número de Froude em função de x . É possível observar que o fluxo é subcrítico, pois não ultrapassa $F > 1$. **Baixo, esquerda:** Temperatura efetiva por $|\beta_\omega|^2 = 1/(e^{\omega/T_\omega} - 1)$ em função de ω . **Baixo, direita:** $\ln R_\omega$ (sólido) e logaritmo de $|A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2$ (tracejado) em função de ω . Os traços verticais indicam ω_{min} . Para $\omega < \omega_{min}$ vemos que a temperatura efetiva some linearmente, e que os coeficientes hidrodinâmicos ($|A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2$) dominam o espalhamento. Vemos também que $\ln R_\omega$ é linear por uma boa aproximação, conforme observado em [8]. Imagem e textos retirados de [9].

e os demais modos pode ser expressa como:

$$\phi_\omega^{in} \rightarrow \alpha_\omega \phi_\omega^{out} + \beta_\omega (\phi_{-\omega}^{out})^* + A_\omega \phi_\omega^{out} + \tilde{A}_\omega \phi_\omega^{in}, \quad (6)$$

onde ϕ_ω^{in} no lado esquerdo representa a onda gerada no experimento com fluido, e os outros modos são as ondas que são estimuladas pela dispersão ($\phi_\omega^{d,out}$ e $(\phi_{-\omega}^{out})^*$), conforme o esperado pela radiação Hawking, e uma refletida (ϕ_ω^{out}), devido a dinâmica da água e outra (ϕ_ω^{in} , no lado direito, com o coeficiente \tilde{A}_ω) que pode continuar o movimento da onda gerada, mas com uma amplitude menor em fluxos subcríticos. A conservação da norma implica em uma relação entre os coeficientes na forma:

$$|\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 + |A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2 = 1. \quad (7)$$

Se as amplitudes das ondas estimuladas dominam o espectro das ondas que estão saindo do buraco negro ($|A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2 \ll 1$), temos que $|\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 \approx 1$. Sendo assim, o espectro pode ser obtido a partir da relação:

$$R_\omega \equiv \left| \frac{\beta_\omega}{\alpha_\omega} \right|^2 \approx e^{-\omega/T_\omega}, \quad (8)$$

com T_ω sendo a temperatura efetiva observada. É importante notar que $\ln R_\omega$ é uma função linear, e é a partir dessa relação entre os modos estimulados (α_ω e β_ω) que os dados serão analisados.

3 Experimento e discussão

Em um dos experimentos mais promissores, conduzido pelo grupo liderado por Weinfurter [8], foi criado um sistema análogo a um buraco branco² com um fluxo subcrítico, onde o número de Froude do fluxo é menor que 1, ou seja, não há uma região onde o fluxo é supersônico. Nesse experimento, eles observaram que as ondas geradas, contrárias ao fluxo, eram parcialmente bloqueadas de atravessar uma determinada região devido ao fluxo e à geometria do recipiente. Esse bloqueio estimulava a produção de ondas na direção do fluxo, resultando em

²Essa abordagem não apresenta problemas, uma vez que um buraco branco, no qual nada pode entrar, é essencialmente um buraco negro revertido no tempo, no qual nada pode sair.

um comportamento que se assemelhava a um espectro térmico, em conformidade com as previsões teóricas.

Os dados do grupo foram retirados a partir da relação dos pares de ondas estimulados,

$$\left| \frac{\alpha_\omega}{\beta_\omega} \right|^2 = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T(\omega)}\right), \quad (9)$$

onde α_ω representa a amplitude da onda estimulada com norma positiva e β_ω é a amplitude da onda estimulada com norma negativa. A partir dessa relação o grupo concluiu que observou $R_\omega \approx 0.7$ Hz, e uma temperatura de $T_\omega = 6 \times 10^{-12}$ K.

No entanto, observa-se que essa relação é a mesma apresentada na equação (8) e é válida somente quando as amplitudes das ondas estimuladas são muito maiores do que a amplitude da onda hidrodinâmica ($|A_\omega|^2 + |\tilde{A}_\omega|^2 \ll 1$, alcançados em fluxos transcíticos).

Portanto, ao realizar um estudo mais aprofundado das relações de dispersão [7, 9] e das condições impostas no experimento, verifica-se que o fluxo do experimento não possui uma velocidade alta o suficiente para impedir completamente a propagação dessas ondas. Isso significa que a amplitude $|\beta_\omega|$ não cresce significativamente. Em outras palavras, as ondas observadas no experimento não são apenas as ondas estimuladas pela presença de um horizonte de eventos, mas também incluem ondas refletidas devido à dinâmica hidrodinâmica envolvida. Portanto, as ondas observadas não correspondem apenas a ondas emitidas pela presença análoga de um buraco negro; existem também ondas hidrodinâmicas que sofreram espalhamento.

Portanto, a relação (9) não pode ser usada para calcular o espectro, uma vez que os modos A_ω e \tilde{A}_ω da equação (6) não podem mais ser negligenciados. É necessário levar em consideração a contribuição desses modos para uma análise mais precisa do espectro observado.

Outro problema levantado por [9] é que a temperatura efetiva (T_ω) não é bem definida em fluxos subcríticos, pois perdemos a semelhança com o espectro térmico esperado para a lei de Planck. Portanto, foram feitas três tentativas distintas de definir a temperatura, utilizando diferentes métodos.

Uma das tentativas consiste em extrair a temperatura do plateau da figura no lado esquerdo do gráfico 2, resultando em uma temperatura próxima de 0.4 Hz. Outra tentativa é obter a temperatura a partir da linearidade de R em função de ω , resultando em uma temperatura de 0.5 Hz. A terceira tentativa é utilizar a relação $T_H = (1/2\pi)\max|\partial_x(v - c)|$, que define a temperatura a partir do local onde está ocorrendo o espalhamento. No entanto, é difícil definir o local onde ocorre o espalhamento para um fluxo subcrítico, e os resultados divergem dos dois resultados anteriores. Se calcularmos no ponto de cima da inclinação descendente, temos $T_H \approx 0.15$ Hz, e embaixo da inclinação ascendente, temos $T_H \approx 0.77$ Hz.

4 Conclusão

Ao longo da pesquisa, estudamos como é possível que um buraco negro possua uma temperatura associada a ele, devido às diferenças entre os estados de vácuo definidos antes e após a formação do buraco negro. No entanto, observamos a dificuldade de observar tal temperatura, já que um buraco negro de massa solar emitiria radiação a uma temperatura da ordem de 6.2×10^{-8} K, muito abaixo da radiação cósmica de fundo, cuja temperatura é de 2.72 K. Além disso, encontramos o problema das frequências transplanckianas, onde as ondas da Radiação Hawking próximas do buraco negro teriam frequências extremamente altas e muito mais energéticas do que o próprio buraco negro.

Como alternativa, estudamos modelos análogos para verificar em quais condições seria possível observar os efeitos da Radiação Hawking sem as frequências transplanckianas. Até o momento, os resultados são satisfatórios, mas ainda não conclusivos, devido ao tipo de fluxo, subcrítico, utilizado no experimento [8], que não permite uma conclusão definitiva sobre a temperatura efetiva observada no experimento, uma vez que existe um domínio de ondas que não contribuem para o espectro térmico e o espectro perde sua planckianidade.

No entanto, é importante ressaltar que, embora os resultados ainda não demonstrem uma temperatura bem definida, aspectos relacionados à existência da Radiação Hawking em fluidos foram observados. Isso sugere que é possível que a Radiação Hawking sobreviva mesmo sem a presença de frequências transplanckianas, além de ser um efeito global e não exclusivo de buracos negros, como apontado por Unruh [10].

Referências

- [1] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 2333–2346, Apr 1973.
- [2] S. W. HAWKING, “Black hole explosions?,” *Nature*, vol. 248, pp. 30–31, Mar. 1974.
- [3] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications In Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 199–220, Aug. 1975.
- [4] N. S. M. de Santi and R. Santarelli, “Desvendando a radiação hawking,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 41, no. 3, 2019.
- [5] W. G. Unruh, “Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 51, pp. 2827–2838, Mar 1995.
- [6] W. G. Unruh, “Experimental black-hole evaporation?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, pp. 1351–1353, May 1981.

- [7] S. J. Robertson, “The theory of hawking radiation in laboratory analogues,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 45, p. 163001, aug 2012.
- [8] S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, “Measurement of stimulated hawking emission in an analogue system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 021302, Jan 2011.
- [9] F. Michel and R. Parentani, “Probing the thermal character of analogue hawking radiation for shallow water waves?,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, p. 044033, Aug 2014.
- [10] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, Aug 1976.