



Introdução às curvas algébricas planas:

Intersecção de cônicas

Palavras-Chave: Curvas Algébricas Projetivas; Intersecção de Cônicas; Teorema de Bezout

Autores(as):

Bruno Yuji Kobaiashi Marques, IMECC –UNICAMP

Prof^(a). Dr^(a). Marcos Benevenuto Jardim, IMECC -UNICAMP

INTRODUÇÃO:

Neste projeto de iniciação científica, o aluno continuou os estudos de um projeto anterior onde foi introduzido a área de Geometria Algébrica, sendo está responsável pela resolução de problemas da geometria através de ferramentas da álgebra abstrata e vice-versa.

Mais especificamente, o projeto focou no estudo das curvas algébricas planas projetivas, especificamente nas cônicas, e, posteriormente, na intersecção destas curvas, sendo utilizado principalmente o livro *Introdução as Curvas Algébricas Planas* do *Israel Vainsencher* como referência teórica.

No plano projetivo, as cônicas podem ser vista algebricamente como as raízes de um polinômio homogêneo de segundo grau, ou seja, dado um polinômio de segundo grau não constante $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$, com K sendo um corpo, temos que uma cônica C será dada por $C = \{(X, Y, Z) \in K^2: F(X, Y, Z) = 0\}$, ou ainda, podemos escreve-lá como:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EXZ + FYZ = 0$$

com A, B, C, D, E e F não sendo todos simultaneamente iguais a zero.

Sendo assim, na primeira parte do projeto, foram estudados os principais conceitos sobre intersecção de curvas afins e de curvas projetivas, para posteriormente fazer a análise e demonstração do teorema de Bezout. Já na segunda parte do projeto, foram estudados os conceitos de multiplicidade de intersecção e algumas de suas aplicações.

Além disso, com o último projeto realizado, foi possível de se perceber que as cônicas possuem algumas classificações, que variam de acordo com o espaço e o corpo em que elas estão definidas. Com isso, o objetivo principal deste trabalho será o de analisar as diversas intersecções que há entre as cônicas e classificá-las, verificando, por exemplo, a multiplicidade dos pontos de intersecção em cada um dos casos.

METODOLOGIA:

O estudo foi feito a base da leitura de livros indicados pelo professor orientador, pesquisas na internet em artigos científicos, visualização de vídeos sobre o assunto, e posteriormente com reuniões com o professor orientador, onde eram levados as evoluções e feitos do aluno para que fossem discutidos e corrigidos caso fosse necessário.

O principal livro a ser discutido foi o livro Introdução as Curvas Algébricas Planas do Israel Vainsencher, onde foi estudado principalmente os capítulos 2, 3, 5 e 6 do livro, os quais falam sobre os conceitos de intersecção de curvas e multiplicidades de intersecção, primeiramente com uma visão afim e passando depois para o espaço projetivo. Após isso, foi feita também a demonstração de algumas proposições e a resolução de alguns exercícios do próprio livro sugeridos pelo professor orientador, para que fosse colocado em prática os conceitos estudados.

Além deste livro, foram estudados também, mas em menor peso, outros livros e também alguns artigos científicos da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e dissertações de mestrado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Neste projeto de iniciação científica, o objetivo principal foi aprofundar um pouco o conhecimento do aluno na área da Geometria Algébrica, uma área de grande importância que mostra como duas grandes áreas da matemática, a Álgebra e a Geometria se relacionam, podendo fazer a resolução de problemas da geometria através de ferramentas da álgebra e vice-versa.

Mais especificamente, o projeto consistiu inicialmente em reforçar e formalizar alguns conceitos da Geometria Algébrica estudados na pesquisa anterior, como por exemplo a definição de curvas algébricas como ideais, e, após isso, estudar alguns conceitos novos da área, começando com um estudo sobre a intersecção entre as curvas algébricas e depois estudando formas de se encontrar e calcular as multiplicidades de intersecção entre estas curvas. Em particular, o estudo foi focado nas cônicas (soluções de um polinômio de segundo grau), que são objetos com aplicações em diversas áreas, principalmente na física.

Após isso, com este aprofundamento do estudo em geometria algébrica, foi feita a demonstração de alguns teoremas e a resolução de alguns exercícios, para que fosse posto em prática o conteúdo teórico estudado durante os meses. Mas, com o foco principal em querer resolver o problema proposto pela pesquisa que seria o de analisar a intersecção que há entre as cônicas.

Com estes exercícios, foi possível observar primeiramente que, dado duas curvas F e G que não possuem componentes em comum, temos que a soma das multiplicidades dos pontos de intersecção (m_i) entre estas curvas será sempre igual ao grau de F multiplicado pelo grau de G , ou seja:

$$\sum m_i = \text{gr}F * \text{gr}G$$

Com isso, conseguimos observar também que a intersecção entre as cônicas poderão ocorrer de 5 maneiras diferentes, pois as cônicas possuem sempre grau 2, sendo assim, temos que $\sum m_i = 2 * 2 = 4$. Portanto, temos que os possíveis casos de intersecção entre cônicas serão:

- 4 pontos de intersecção com multiplicidade 1 cada;
- 3 pontos de intersecção com 2 deles tem multiplicidade 1 e 1 tendo multiplicidade 2;

- 2 pontos de intersecção com multiplicidade 2 cada;
- 2 pontos de intersecção com 1 deles tendo multiplicidade 1 e o outro tendo multiplicidade 3;
- 1 ponto de intersecção com multiplicidade 4.

Com isso, para cada um dos casos especificados, foi mostrada primeiramente a validade deste caso, encontrando expressões de cônicas que nos fornecem cada um dos casos de intersecção, e, após isso, foram encontradas as expressões gerais que as cônicas têm em cada um destes casos, fazendo uma construção de cada caso utilizando as propriedades vistas durante o estudo teórico.

CONCLUSÕES:

Como foi dito, as curvas algébricas planas afins e projetivas têm aplicações em diversas áreas do conhecimento, principalmente na física e computação, com isso, o projeto teve como objetivo estudar estas curvas, mas mais especificamente as curvas algébricas de segundo grau (ou cônicas), e a intersecção que há entre elas, para que futuramente, caso o aluno deseje, ele consiga aplicar todo este conhecimento adquirido em algum problema aplicado que encontre durante sua carreira.

Para analisar estas intersecções entre as cônicas, foram utilizadas as propriedades que há na multiplicidade dos pontos de intersecção entre curvas algébricas, focando principalmente no espaço projetivo. Além disso, foram estudados diversos conteúdos de outros livros, o que acarretou em uma base muito maior para que o aluno conseguisse compreender melhor os conteúdos que seriam vistos na pesquisa, por se tratar de um conteúdo que não se é estudado na graduação e que possui um teor mais rigoroso e abstrato.

BIBLIOGRAFIA

VAINSENER, Israel. **Introdução às Curvas Algébricas Planas**. Rio de Janeiro, IMPA, 1979

GIBSON, C. G. **Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate**

Introduction. 1.ed. New York: Cambridge University Press, 2001.

NOBREGA, Felipe. **CURVAS ALGÉBRICAS E O TEOREMA DE BÉZOUT**. PUC-Rio. Disponível em: https://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/pibic/relatorio_resumo2014/relatorios_pdf/ctc/MAT/MAT-Filipe%20Bellio%20da%20N%C3%B3brega.pdf

HARTHSHOME, Robin. **Geometry: Euclid and Beyond**. Los Angeles, Springer, 2000

ANDRADE, Lenimar. A construção de cônicas e o Teorema de Pascal. **Revista do Professor de Matemática**, João Pessoa, v. 45, 2001