Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa e aplicações

Palavras-Chave: Equações diferenciais, Modelos, Métodos

Autores(as):

Mário Sérgio Maduro Santana, IMECC – UNICAMP

Prof(ª). Dr(ª). Giuliano Angelo Zugliani, IMECC – UNICAMP

---

1 Introdução

Este texto tem como objetivo tratar dos principais assuntos abordados durante a realização do projeto de iniciação científica e que serão abordados na apresentação durante o Congresso de Iniciação Científica da UNICAMP.

2 Assuntos Principais

2.1 EDO's Lineares: Análise Qualitativa

Nesta seção o objetivo principal é a análise qualitativa de sistema lineares 2×2 do tipo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \cdot \vec{x} \tag{1}$$

Observa-se que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, onde a_{ij} representa uma constante, e que $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Cabe dizer que as análises realizadas foram divididas em alguns casos:

1. Autovalores distintos e de sinais opostos;
2. Autovalores distintos e de mesmo sinal;
3. Autovalores complexos com parte real não nula;
4. Autovalores imaginários puros;
5. Autovalores idênticos:
   a. Existência de apenas 1 autovetor LI;
   b. Existência de 2 autovetores LI.

A análise qualitativa de cada um dos itens anteriores foi estudada, de forma detalhada. Em resumo, nos casos 1, 2, 5a a análise qualitativa foi baseada na observação das soluções gerais de cada um dos itens, onde foram analisados os comportamentos quando o parâmetro $t \to \pm\infty$ considerando as condições iniciais sobre as retas colineares aos autovetores (ou autovetor generalizado no caso 5a) ou fora delas. Já no caso 5b, o comportamento qualitativo também foi baseado na observação da solução geral, com a diferença de que agora o comportamento dela foi analisado apenas com base na posição das condições iniciais. Nos casos 3 e 4 foi feita uma mudança para coordenadas polares que facilitaram bastante a análise do problema. Cabe dizer que na maioria dos casos foi necessária a realização de uma mudança de base no sistema original a fim de se obter melhores resultados qualitativos.

Ou seja, com exceção do caso 5b, em todos os outros itens, durante a análise qualitativa, foi necessário fazer uma mudança de base no sistema (1). Nos itens 1 e 2 foi realizada uma mudança de base para a base dos 2 autovetores LI; já no caso 3 e 4 foi realizada a mudança para a base $B = \{Re(v), Im(v)\}$, onde v é um dos autovetores complexos; No caso 5a a mudança foi feita para a base do autovetor e do autovetor generalizado. Nos casos 1, 2 e 5a a mudança de base foi essencial para a verificar se as retas colineares aos autovetores (ou autovetor generalizado) eram assíntotas, ou não, para as soluções do sistema linear. Já nos casos 3 e 4 a mudança de base foi realizada apenas pela maior facilidade da análise qualitativa do comportamento das soluções.

2.2 Aplicações

No projeto também foram realizadas análises detalhadas do seguintes problemas:

2.2.1 Competição entre as Espécies

O sistema de EDO's que descreve as populações de 2 espécies, em ambiente fechado, que competem por um mesmo alimento limitado é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot (\epsilon_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot (\epsilon_2 - \sigma_2 x_2 - \alpha_2 x_1) \end{cases} \tag{2}$$

Onde x_1 e x_2 representam, respectivamente, a densidade das populações das espécies 1 e 2 no ambiente fechado; por esse motivo, considera-se sempre $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. As constantes ϵ_1 e ϵ_2 representam as taxas de crescimento das populações caso não haja algo que limite seus crescimentos. Já as quantidades $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ e $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ são as taxas de saturação, respectivamente, das populações 1 e 2 considerando que cada uma delas está isolada em algum ambiente. Por fim, α_1 e α_2 representam, respectivamente, a interferência da espécie 2 sobre a espécie 1 e a interferência da espécie 1 sobre a espécie 2. Cabe ressaltar que, durante o projeto, houve a preocupação de explicitar o raciocínio para se chegar no sistema (7).

2.2.2 Predador-Presa

O sistema de EDO's, de Lotka-Volterra, que descreve a presença de um predador e uma presa em um ambiente fechado é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot (a - \alpha x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot (-c + \gamma x_1) \end{cases} \tag{3}$$

Onde α e γ representam o grau de interação entre as espécies consideradas(Predador e Presa), a representa a taxa de crescimento da população de presas e c é a taxa de morte da população de predadores. Note que pelo mesmo motivo do sistema (7), x_1 e x_2 são sempre não negativos no sistema (3). Ressaltasse que, durante o projeto, foram explicitadas as hipóteses consideradas para se chegar no sistema (3).

2.3 O Segundo Método de Liapunov

No presente projeto o Segundo Método de Liapunov foi utilizado para a análise qualitativa da estabilidade de sistemas localmente lineares.

Veja a seguir algumas definições importantes e um dos teoremas de Lyapunov presentes no livro *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* de *Boyce e Diprima*:

Seja o sistema autônomo:

$$\frac{dx_1}{dt} = F(x_1, x_2) \quad e \quad \frac{dx_2}{dt} = G(x_1, x_2) \tag{4}$$

Definições

- **Positiva Definida**: V é positiva definida em D se $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) > 0$, $\forall$(x,y)$\neq (0,0) \in D$;
- **Negativa Definida**: V é negativa definida em D se $V(0,0) = 0$ e $V(x,y) < 0$, $\forall$(x,y)$\neq (0,0) \in D$;

  Obs.: se, nas definições acima, $<$ e $>$ forem substituídos por $\leq$ e $\geq$, teremos as definições de **Negativa Semidefinida** e **Positiva Semidefinida**.

Teorema da Estabilidade de Liapunov

Suponha que o sistema autônomo (4) tenha um ponto crítico isolado na origem. Se existir uma função V que é contínua, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, positiva definida e para qual a função $\dot{V}$, dada por $\dot{V}(x_1, x_2) = V_{x_1}(x_1, x_2) \cdot F(x_1, x_2) + V_{x_2}(x_1, x_2) \cdot G(x_1, x_2)$, é negativa definida em algum domínio D no plano xy contendo (0,0), então a origem será um ponto crítico assintoticamente estável. Se $\dot{V}$ for negativa semidefinida, então a origem será um ponto crítico estável.

Veja na próxima seção dois exemplos simples de aplicação do teorema de estabilidade acima.

2.3.1 Exemplo

1-) Mostre que o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases} \tag{5}$$

possui ponto crítico $(0,0)$ assintóticamente estável.
Solução:

- Pontos Críticos: O único ponto crítico é o (0,0)
- Encontrando a função de Lyapunov adequada:

  Procurando uma função do tipo $V(x_1, x_2) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2$, tem-se que V é positiva definida desde que a e b sejam positivos. Além disso:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2ax_1 \cdot (-x_1^3 + x_1 x_2^2) + 2bx_2 \cdot (-2x_1^2 x_2 - x_2^3) \overset{a=b=1/2}{\Longrightarrow}$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_1^2 x_2^2 - x_2^4 < 0, \;\; \forall \;\; (x_1, x_2) \neq (0,0), \;\; e \;\; \dot{V}(0,0) = 0 \tag{6}$$

  Logo, como $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2)$ é positiva definida e $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_1^2 x_2^2 - x_2^4$ é negativa definida, temos pelo *Teorema da Estabilidade de Liapunov* que o ponto crítico $(0,0)$ é assintóticamente estável.

2-) Mostre que o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 + 2x_2^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 x_2^2 \end{cases} \tag{7}$$

possui ponto crítico $(0, 0)$ estável.
Solução:

- Pontos Críticos: O único ponto crítico é o (0,0)
- Encontrando a função de Lyapunov adequada:

  Procurando uma função do tipo $V(x_1, x_2) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2$, tem-se que V é positiva definida desde que a e b sejam positivos. Além disso:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2ax_1 \cdot (-x_1^3 + 2x_2^3) + 2bx_2 \cdot (-2x_1 x_2^2) \overset{a=b=1}{\Longrightarrow}$$
$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4 \leq 0, \quad \forall \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad e \quad \dot{V}(0, 0) = 0 \tag{8}$$

  Logo, como $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é positiva definida e $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4$ é negativa semidefinida, temos pelo *Teorema da Estabilidade de Liapunov* que o ponto crítico $(0, 0)$ é estável.

3 Referências

- A referência principal dos temas presentes neste resumo foi:

  [1] Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 11ªEdição, Boyce, Diprima e Meade.