XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA COM APLICAÇÕES EM TEORIA DOS NÚMEROS

Palavras chave: SISTEMAS DINÂMICOS, TEORIA ERGÓDICA, TEORIA DOS NÚMEROS

Autores:
ANDRÉ BOSCARIOL RASERA [IMECC - UNICAMP]
Prof$^{\underline{o}}$ Dr. RICARDO MIRANDA MARTINS (orientador) [IMECC - UNICAMP]

INTRODUÇÃO

Neste projeto, estudamos os fundamentos da teoria ergódica, com o objetivo de aplicá-la a problemas de teoria dos números. Os dois resultados teóricos principais são o Teorema da Recorrência de Poincaré e o Teorema Ergódico.

METODOLOGIA

A metodologia deste projeto consistiu em estudar e consultar referências variadas, listadas ao final deste resumo, reescrevendo e completando as demonstrações e argumentos e fazendo exercícios. Foram realizadas reuniões semanais com o orientador para discutir os resultados, tirar dúvidas e planejar os próximos passos.

DISCUSSÃO

Neste projeto, um sistema dinâmico é uma 4-upla $(M, \mathcal{A}, \mu, f)$ ou $(M, \mathcal{A}, \mu, (f^t)_{t\in\mathbb{R}})$, em que M é um conjunto munido de uma topologia (e, possivelmente, de uma estrutura diferenciável), $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de M ditos mensuráveis e μ uma medida; no primeiro caso, chamado sistema dinâmico discreto, $f\colon M \to M$ é uma função (geralmente contínua) e, no segundo caso, chamado sistema dinâmico contínuo, $f^t\colon M \to M$ é um fluxo em t (geralmente diferenciável) [5].

A existência de uma medida permite desenvolver uma teoria de integração em contextos variados, generalizando as noções de densidade, volume e probabilidade, conceitos de grande importância para o estudo de sistemas dinâmicos [1, 2].

A integral em espaços de medida é bem comportada com respeito aos limites e à convergência. Os teoremas clássicos a seguir são caracterizações bastante úteis dessas propriedades, empregadas ao longo do projeto.

Teorema 1 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja (f_n), $f_n\colon M \to [0, +\infty]$, uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis que converge pontualmente para $f\colon M \to [0, +\infty]$. Logo, f é mensurável e*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Teorema 2 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja (f_n), $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, uma sequência de funções integráveis que converge pontualmente à função $f\colon M \to \mathbb{R}$. Se existe uma função integrável g tal que*

$|f_n| \leq g$, *então* f *é integrável e*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu.$$

Para o resultado a seguir, considere $M = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel (a σ-álgebra gerada pelos abertos da topologia) de $\mathbb{R}^n$ e μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3 (Teorema da Derivação de Lebesgue)**.** *Seja* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *uma função localmente integrável, isto é, tal que* $f\chi_K$ *é integrável para todo compacto* $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Se $B(\mathbf{x}, r)$ *representa a bola aberta de centro* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *e raio* $r > 0$, *então*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, r))} \int_{B(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|\, d\mu(\mathbf{y}) = 0$$

para quase todo ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Em particular,*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, r))} \int_{B(\mathbf{x},r)} f\, d\mu = f(\mathbf{x})$$

para quase todo ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

No que segue, fixe M um espaço topológico (com, possivelmente, alguma estrutura adicional, isto é, uma métrica ou uma estrutura diferenciável). O conceito mais básico na teoria ergódica é o de medida invariante.

Definição 4. *Seja* $f\colon M \to M$ *um sistema dinâmico discreto. Uma medida* μ *é dita invariante por* f *(ou* f *preserva* μ*) se, para todo mensurável* E,

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Se $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *é um sistema dinâmico contínuo, então* μ *é invariante por* $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ *se*

$$\mu(E) = \mu(f^{-t}(E)) \quad \forall E \in \mathcal{A},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

O primeiro importante teorema deste projeto é o Teorema da Recorrência de Poincaré, que garante que, na presença de uma medida invariante, a transformação quase sempre regressa à região inicial, no sentido precisado abaixo. É um resultado com muitas consequências teóricas importantes e aplicações variadas. A dinâmica dos pontos que regressam à região inicial, chamados recorrentes, essencialmente captura a complexidade da dinâmica do sistema [4].

Teorema 5 (Teorema da Recorrência de Poincaré)**.** *Seja* $f\colon M \to M$ *uma transformação mensurável e* μ *uma medida invariante finita. Seja* $E \in \mathcal{A}$ *tal que* $\mu(E) > 0$. *Portanto, quase todo ponto* $x \in E$ *possui algum iterado* $f^n(x)$ *que pertence a* E. *Tais pontos são chamados recorrentes.*

Corolário 6. *Nas condições do Teorema da Recorrência, para quase todo* $x \in E$, *existem infinitos naturais* n *tais que* $f^n(x) \in E$.

As consequências do Teorema da Recorrência foram analisadas para alguns casos relevantes.

Considere, por exemplo, a transformação parte fracionária de $10x$, isto é,

$$f\colon [0,1] \to [0,1],\ f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor,$$

e a medida de Lebesgue m em $[0,1]$. Estudando a ação de f em intervalos, que geram a σ-álgebra de Borel de $[0,1]$, é possível constatar que m é invariante por f. Assim, em conjuntos de medida positiva em $[0,1]$, vale o Teorema da Recorrência. Com essa informação, é possível demonstrar resultados surpreendentes a respeito da expansão decimal de números entre 0 e 1. De fato, se $a \in [0,1]$ e $a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ é sua expansão decimal, segue que

$$f(0, a_1a_2a_3\ldots) = 0, a_2a_3a_4\ldots,$$

isto é, f funciona como o shift à esquerda em sequências unilaterais.

Teorema 7. *Um dígito $i \in \{0, \ldots, 9\}$ qualquer aparece infinitas vezes na expansão decimal de quase todo número $x \in [0,1]$.*

Um outro exemplo importante é a medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}^n$: com a fórmula de mudança de variáveis para a integral de Lebesgue, é possível caracterizar os campos vetoriais que preservam volume [2, 3].

Teorema 8. *Um difeomorfismo de classe C^1 $f\colon U \to U$ deixa invariante a medida de Lebesgue se, e somente se $|J_f| = 1$, isto é, o determinante jacobiano de f é constante e igual a 1. Disso segue que o fluxo $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ associado a um campo vetorial $F\colon U \to U$ de classe C^1 deixa invariante o volume se, e somente se, $\operatorname{div} F = 0$ (isto é, o divergente de F é igual a 0).*

Por fim, um exemplo de grande relevância para a teoria dos números. A transformação de Gauss, $G\colon (0,1] \to (0,1]$, $G(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$, preserva a medida

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{1}{1+x}\, dm(x),$$

equivalente à medida de Lebesgue (as duas medidas possuem os mesmos conjuntos de medida nula). A transformação de Gauss está associada à expansão de um número em fração contínua, a melhor aproximação racional possível de um número irracional.

A análise de um sistema dinâmico a partir da perspectiva da teoria ergódica exige inicialmente uma medida invariante à transformação. Portanto, o problema da existência de medidas invariantes é primordial nessa área da matemática e, por isso, foi estudado em seguida.

Teorema 9. *Seja (M,d) um espaço métrico compacto e $f\colon M \to M$ uma função contínua (um sistema dinâmico discreto). Então, existe uma probabilidade invariante por f na σ-álgebra de Borel de M. O mesmo resultado vale considerando um fluxo de funções contínuas (um sistema dinâmico contínuo).*

A estratégia para demonstrar o teorema consiste em definir uma topologia conveniente no espaço das probabilidades borelianas em M, denotado $\mathcal{M}_1(M)$, construir uma função contínua adequada no espaço de tais probabilidades com respeito a essa topologia, e encontrar um ponto fixo, que é, por sua vez, a medida invariante desejada [4, 5].

A topologia τ em questão é a topologia fraca* em $\mathcal{M}_1(M)$ no espaço das probabilidades borelianas, instância particular de uma construção importante em análise funcional. Nesse caso, τ é bem comportada, e herda as propriedades de M: $(\mathcal{M}_1(M), \tau)$ é metrizável e compacto; em particular, é sequencialmente compacto.

A função contínua em questão, cujos pontos fixos correspondem a medidas invariantes, é também uma instância de um conceito importante de análise funcional, o pushforward; com o pushforward em mãos, é possível definir uma sequência de medidas cujos pontos de acumulação são precisamente medidas invariantes por f.

O segundo resultado central estudado neste projeto foi o Teorema Ergódico, que afirma que as médias temporais de permanência num conjunto mensurável existem para quase todo ponto de partida.

Definição 10. *Seja $E \subseteq M$ um subconjunto mensurável e $x \in M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina*

$$\tau_n(E,x) = \frac{1}{n} \cdot |\{j \in \{0, \ldots, n-1\} : f^j(x) \in E\}| = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x)),$$

em que $|X|$ é a cardinalidade do conjunto X. Se $\lim_{n\to\infty} \tau_n(E,x)$ existe, então

$$\tau(E,x) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(E,x)$$

é chamado tempo médio de permanência da órbita de x em E.

Teorema 11 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja $f\colon M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por f. Dado qualquer mensurável $E \subseteq M$, o tempo médio de* *permanência* $\tau(E,x)$ *existe para* μ*-quase todo* $x \in M$ *e*

$$\int \tau(E,x)\, d\mu(x) = \mu(E).$$

Os sistemas nos quais o tempo médio de permanência num dado conjunto mensurável é igual à média espacial (medida do conjunto mensurável) são chamados ergódicos e o principal objeto de estudo da teoria ergódica [5].

Definição 12. *Uma transformação* $f\colon M \to M$ *é dita ergódica com respeito a uma probabilidade invariante* μ *quando suas médias temporais coincidem quase todo ponto com as médias espaciais. Mais precisamente,* f *é ergódica com respeito a* μ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi\, d\mu$$

para toda função μ*-integrável* $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ *e* μ*-quase todo ponto* x*.*

O conceito de ergodicidade encapsula matematicamente uma certa noção de uniformidade e aleatoriedade, no sentido de que o comportamento ao longo do tempo de uma condição inicial específica captura a dinâmica de todo o sistema. Assim, os sistemas ergódicos são essencialmente irredutíveis e compõem enquanto átomos os sistemas dinâmicos. Uma das grandes conquistas da teoria de sistemas dinâmicos, o Teorema da Decomposição Ergódica, formaliza essa ideia [4].

As transformações que preservam medidas mencionadas anteriormente também são exemplos de transformações ergódicas.

Em particular, a expansão decimal $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$, que preserva a medida de Lebesgue, é uma transformação ergódica. Usando o Teorema Ergódico, é possível extrair mais conclusões surpreendentes sobre a expansão decimal dos números reais.

Teorema 13. *Um número* $x \in (0,1)$ *é dito balanceado se os dígitos* $0,\ldots,9$ *aparecem com igual frequência em sua expansão decimal. Segue da ergodicidade de* f *com respeito à medida de Lebesgue* m *que quase todo ponto* $x \in (0,1)$ *é balanceado.*

A primeira aplicação estudada da teoria ergódica em teoria dos números é uma demonstração alternativa do importante Teorema de Szmerédi, que diz respeito a progressões aritméticas em certos subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

Definição 14. *Um intervalo* I *em* $\mathbb{Z}$ *é um conjunto da forma*

$$I = \{x \in \mathbb{Z} : a \le x < b\},$$

com $a < b$ *números inteiros. A densidade superior de um subconjunto* $S \subseteq \mathbb{Z}$ *é o número real entre* 0 *e* 1

$$\limsup_{|I|\to\infty} \frac{|S \cap I|}{|I|},$$

em que o limite superior é tomado com respeito a todos os intervalos de $\mathbb{Z}$*.*

Teorema 15 (Teorema de Szmerédi)**.** *Se* S *é um subconjunto de* $\mathbb{Z}$ *com densidade superior positiva, então* S *possui progressões aritméticas de comprimento arbitrário; mais precisamente, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, existem* $m,n \in \mathbb{Z}$ *tais que* $m, m+n, \ldots, m+kn \in S$*.*

A demonstração ergódica do teorema acima emprega uma generalização sofisticada do Teorema da Recorrência de Poincaré, descrita a seguir [5].

Teorema 16. *Sejam* $f_i\colon M \to M$*,* $i = 1,2,\ldots,k$ *transformações que preservam uma probabilidade* μ *em* M *e tais que* $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ *para todo* $i,j = 1,2,\ldots,k$*. Então, para qualquer mensurável* $E \subseteq M$ *tal que* $\mu(E) > 0$*, existe algum* $n \ge 1$ *tal que*

$$\mu(E \cap f_1^{-n}(E) \cap f_2^{-n}(E) \cap \cdots \cap f_k^{-n}(E)) > 0.$$

O segundo resultado de teoria dos números que pode ser derivado com as ferramentas da teoria ergódica, em particular do estudo de rotações em toros de dimensão arbitrária, é o chamado Teorema de Weyl, com o qual finalizamos este projeto.

Definição 17. *Uma sequência $x_n \in S^1$ é dita equidistribuída se para qualquer função contínua $\varphi\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) = \int \varphi \, d\mu.$$

Teorema 18 (Teorema de Weyl)**.** *Seja P o polinômio descrito por*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Se ao menos um dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ é irracional, então a sequência $x_n = \{P(n)\}$, em que $\{x\}$ indica a projeção do número real x em $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, é equidistribuída.

CONCLUSÃO

Este projeto permitiu ao aluno ter contato com vários métodos e resultados relevantes da teoria ergódica, desenvolvendo boa intuição e interesse por essa importante área da matemática. O aluno pretende ingressar no mestrado em Matemática na área de sistemas dinâmicos, com enfoque em teoria ergódica.

Referências

[1] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons, 2014.

[2] V. I. Bogachev. *Measure theory*, volume 1. Springer, 2007.

[3] E. L. Lima. *Curso de análise, vol. 2, Projeto Euclides.* IMPA, 2008.

[4] K. Oliveira and M. Viana. *Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações.* IMPA, 2005.

[5] K. Oliveira and M. Viana. *Fundamentos da teoria ergódica.* IMPA, 2014.