XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

Universidade Estadual de Campinas

Departamento de Matemática IMECC

Sobre os difeomorfismos de Morse-Smale

Bolsista: Arthur Felipe Chagas Sales
Orientador: Dr. Diego Sebastian Ledesma

Palavras chave: Sistemas dinâmicos, Difeomorfismos de Morse-Smale.

1 Introdução

Neste trabalho estudamos os difeomorfismos $f : S^1 \to S^1$ que são de Morse-Smale. Vamos a mostrar, seguindo o trabalho de Oka e Sumi [1], que estes difeomorfismos são conjugados a um difeomorfismo da forma

$$f_{w,\epsilon,n}(x) = x + w + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2n\pi x) \bmod(1)$$

em que $w \in (0,1)$, $\epsilon \in (0,1)$ e $\epsilon n \in (0,1)$.

2 Metodologia

Como estudaremos objetos definidos sobre os círculo S^1, começamos observando que vamos identificar S^1 com o seguinte conjunto

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\},$$

Seja $f : S^1 \to S^1$ um difeomorfismo e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o seu levantamento, isto é, se $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ é a projeção canônica, então $\pi \circ F = f \circ \pi$.

A seguir listamos a definição de alguns conceitos relevantes.

- Um difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ preserva orientação se $F' > 0$.
- Um ponto **periódico** de f é um ponto $p \in S^1$ tal que existe um $m \in \mathbb{N}$ (chamado período) satisfazendo $f^m(p) = p$. Denotamos por $Per(f)$ ao conjunto dos pontos periódicos.
- Seja $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(\tilde{x}) = p$ então dizemos que
  - p é um **sumidouro**, se $0 < |(F^m)'(x)| < 1$,
  - p é uma **fonte**, se $|(F^m)'(x)| > 1$.

Definição 1. *Um difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ é dito um **difeomorfismo de Morse-Smale** se $Per(f)$ é não vazio e consiste de fontes ou sumidouros.*

Assuma que $f,\ g : S^1 \to S^1$ são dois difeomorfismos e que existe um difeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Então dizemos que f e g são **topológicamente conjugados**.

Por outro lado, também temos a seguinte definição.

Definição 2. *Um difeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ é dito **estruturalmente estável** se existe uma C^1 vizinhança U de f tal que para $g \in U$ temos que f e g são conjugados.*

Teorema 1. *Um difeomorfismo de Morse Smale é estruturalmente estável*

Demonstração. Teorema 15.3 [**Devaney**]

□

O conjunto de difeomorfismos $f_{w,\epsilon,n}$ que tem por levantamento as funções

$$F_{w,\epsilon,n}(x) = x + w + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2n\pi x),$$

isto é $f_{w,\epsilon,n} = \pi(F_{w,\epsilon,n})$, em que $w \in (0,1)$, $\epsilon \in (0,1)$ e $\epsilon n \in (0,1)$ é chamada de **Familia Padrão**.

Neste trabalho, seguimos o artigo de Oka e Sumin [2] para mostrar que

Teorema 2. *Todo difeomorfismo de Morse-Smale que preserva orientação é topológicamente conjugado a um difeomorfismo de Morse-Smale que pertence à familia padrão.*

3 Resultados obtidos

Nesta parte vamos fazer a demostração detalhada do Teorema 2 seguindo o trabalho de Oka e Sumi [2].

Primeiramente observamos que dois difeomorfismos são conjugados se tem a mesma cardinalidade de pontos periódicos. De fato, se assumimos que f e g são difeomorfismo de Morse-Smale que preservam orientação e tais que $Per(f)$ e $Per(g)$ são iguais. Considere os conjuntos,

$$S_f = s_1, s_2, \cdots, s_q \quad \text{e} \quad S_g = s'_1, s'_2, \cdots, s'_q,$$

formados pelos sumidouros de f e g respectivamente, lembrando que, por definição, temos que $f(S_f) = S_f$ e $g(S_g) = S_g$.

Para cada ponto $x \in^1$ vamos denotar o ponto x^* como sendo o ponto em **R** satisfazendo $0 \leq x^* < 1$ e $\pi(x^*) = x$ em que π a projeção de $\mathbb{R} \to S^1$. Podemos assumir que $s_1^* < s_2^* < \cdots < s_q^*$ e $s_1^{*'} < s_2^{*'} < \cdots < s_q^{*'}$.
Vejamos que f é topologicamente conjugado a g se $f(s_1) = s_{p+1}$ e $g(s_1') = s_{p+1}'$ para $0 \leq p \leq q-1$ fixo.
Assuma que f é de tipo Morse-Smale e seja $U_f = (u_1, u_2, \cdots, u_q)$ sendo o conjunto de fontes de f, então podemos supor que $s_i^* < u_i^* < s_{i+1}^*$ para $i = 1, ..., q$. Aqui assumimos que $s_{q+1}^* = s_1^* + 1$. Sendo $f : S^1 \to S^1$ que preserva orientação, todos os pontos periódicos vão ter o mesmo período, $m > 0$. Então a órbita de f será dada por

$$O_f(u_i) = \{f^j(u_i)\}_{j=0}^{m-1},\ 1 \leq i \leq 1\}.$$

A variedade instável de $u_i,\ i = 1 \ldots q$, é definido por

$$W^u(f, u_i) = \{x : \lim_{n \to -\infty} f^{mn}(x) = u_i\} = \pi(s_i^*, s_{i+1}^*).$$

Podemos então considerar $S^1 = \cup_{i=1}^q W^u(f, u_i) \cup S_f$, isto é, como a união de todos os conjuntos instáveis com os conjuntos de pontos de sumidouros. Agora podemos também definir as mesmas coisas para g considerando $U_g = \{u_1', \cdots, u_q'\}$ o conjunto de fontes de g.

Se fixarmos um valor qualquer para $1 \leq i \leq q$ então

$$W^u(f, O_f(u_i)) = \bigcup_{j=0}^{m-1} W^u(f, f^j(u_i))$$

analogamente para g. O conjunto $W^u(f, O_f(u_i))$ e $W^u(g, O_g(u_i'))$ são invariantes em f g respectivamente pois temos que

$$f(W^u(f, O_f(u_i))) = W^u(f, O_f(u_i) \quad \text{e} \quad g(W^u(g, O_g(u_i'))) = W^u(g, O_g(u_i')).$$

Fixamos quatro pontos arbitrários tais que

$$a \in P((s_i^*, u_i^*)), \quad b \in P((u_i^*, s_{i+1}^*)), \quad a' \in P((s_i^{*'}, u_i^{*'})) \quad \text{e} \quad b' \in P((u_i^{*'}, s_{i+1}^{*'})).$$

Como $u_i \, e \, u_i'$ são fontes com o mesmo período $m > 0$ para f e g respectivamente, temos

$$[(f^m(a))^*, a^*] \cup [b^*, (f^m(b))^*] \subset (s_i^*, s_{i+1}^*) \quad \text{e} \quad [(g^m(a'))^*, a'^*] \cup [b'^*, (f^m(b'))^*] \subset (s_i^{*'}, s_{i+1}^{*'}).$$

Seja $\phi : \pi([(f^m(a))^*, a^*] \cup [b^*, (f^m(b))^*]) \to \pi([(g^m(a'))^*, a'^*] \cup [b'^*, (f^m(b'))^*])$ sendo um homeomorfismo tal que:

$$\phi(a) = a' \ , \ \phi(f^m(a)) = g^m(a') \ , \ \phi(b) = b' \ , \ \phi(f^m(b)) = g^m(b')$$

Considere $D = \pi(([f *^m (a), a*] \cup [b*, f *^m (b)]))$ e escrevemos $W^u(f, u_i)/\{u_i\}$ como a união disjunta

$$W^u(f, u_i)/\{u_i\} = \bigcup_{k \in Z} f^{mk}(D).$$

Portanto, podemos construir $\tilde{h}_i : W^u(f, u_i) \to W^u(g, u_i')$ tal que $\tilde{h}_i(x) = g^{mk} \circ \phi \circ f^{-mk}(x)$ com $x \in f^{mk}(D)$ para k sendo um número inteiro e $\tilde{h}(u_i) = u_i'$. Como $W_f^u(u_i)$ e $W_g^u(u_i')$ tem a mesma cardinalidade, então $\tilde{h}(x)$ é bijetora e como $\tilde{h}(x)$ é contínua e com inversas contínuas, de onde segue que $\tilde{h}$ é um homeomorfismo.

Definimos $h_i : W_f^u(O_f(u_i)) \to W_g^u(O_g(u_i'))$ com $h_i(x) = g^j \circ \tilde{h}_i \circ f^{-j}(x)$ e observamos que $f|W_f^u(O_f(u_i))$ e $g|W_g^u(O_g(u_i'))$ são topologicamente conjugados.

Das hipóteses segue que podemos escolher um conjunto $I \subset \{1, \cdots, q\}$ tais que U_f e U_g decompostos por uniões disjuntas $U_f = \bigcup_{i \in I} O_f(u_i)$ e $U_g = \bigcup_{i \in I} O_g(u_i')$. Mais ainda, os valores de I são escolhidos a partir da escolha de $f(u_i) = u_j$ $(j = p + i \mod(q))$ e $g(u_i') = u_j'$ $(j = p + i \mod(q))$.

Por fim, definimos a função

$$h : S^1 = \bigcup_{i \in I} W_f^u(O_f(u_i)) \cup S_f \to S^1 = \bigcup_{i \in I} W_g^u(O_g(u_i')) \cup S_g$$

por

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{se} \quad x \in W_f^u(O_f(u_i)),\ i \in I \\ s_i', & \text{se} \quad x = s_i,\ i = 1, \cdots, q \end{cases}$$

Vemos que $h(x)$ é a função de conjugação entre f e g. Supondo que $f(s_1) = s_{p+1}$ para algum $0 \leq p \leq q - 1$, definimos :

$$F(x) = x + \frac{p}{q} + \frac{\epsilon}{2\pi} sen(2qx\pi)$$

onde $0 \leq \epsilon q \leq 1$. Então, temos que $\pi \circ F \circ \pi^{-1} = f_{p/q,\epsilon,q}$ é um difeomorfismo no círculo.

Só resta ver que $f_{p/q,\epsilon,q}$ é de Morse Smale. De fato, seja $F_0(x) = x + \frac{\epsilon}{2\pi} sen(2qx\pi)$. Então $\pi \circ F_0 \circ P^{-1} = f_0$ que é um difeomorfismo de Morse Smale. Agora, como

$$F^q(x) \quad = \quad x + p + \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i=0}^{q-1} sen[2q\pi F^i(x)] = F_0^q(x) + p.$$

De onde segue que $f_{p/q,\epsilon,q}^q = f_0^q$, o que implica que $f_{p/q,\epsilon,q}$ é um difeomorfismo de Morse Smale, pois para um ponto de rotação racional tal que $p = p/q$ então todos os pontos periódicos tem período q logo f^q tem apenas ponto fixos, e cada um destes pontos fixos são hiperbólicos. Então:

$$S_{f_{p/q,\epsilon,q}} = S_{f_{p/q,\epsilon,q}^q} = S_{f_0^q} = S_{f_0} = \left\{ \pi\left(\frac{2i-1}{2q}\right) : i = 1, \cdots, q \right\}.$$

Se $s'_i = \pi(((2i-1)/(2q))$ então:

$$f_{p/q,\epsilon,q}(s'_1) \quad = \quad f_{p/q,\epsilon,q}(\pi(1/(2q)) = \pi \circ F(1/(2q) = \pi\left(\frac{1}{2q} + \frac{p}{q}\right) = s'_{p+1}$$

o que garante que f é topologicamente conjugado a $f_{p/q,\epsilon,q}$ concluíndo assim o que queríamos mostrar.

Exemplo: Vamos escolher

$$h : R \to R \quad x \to x + \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(x) = x - \frac{1}{8}$$

Seja $F(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} sen(2x\pi)$ um elemento da Familia Padrão. Temos:

$$F \circ h(x) = F(h(x)) = x + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} sen\left(2\pi x + 2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$F(h(x)) = x + \frac{5}{8} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} sen(2x\pi) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(2x\pi)\right)$$

Agora

$$G(x) = h^{-1}(F(h(x)) = x + \frac{4}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}(sen(2x\pi) + cos(2x\pi))$$

E observamos que $F(h(x)) = h(G(x))$. Mais ainda, $G(x+1) = G(x) + 1$, de fato

$$\begin{aligned} G(x+1) &= (x+1) + \frac{4}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}(sen(2\pi(x+1)) + cos(2\pi(x+1))) \\ &= x + \frac{4}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi}(sen(2\pi x) + cos(2\pi x)) + 1 = G(x) + 1. \end{aligned}$$

4 Conclusão

Foi mostrado que todo difeomorfismo de Morse-Smale que preserva orientação é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Morse-Smale que pertence à familia padrão.

5 Referências

1 Devaney, R. L. An introduction to chaotic dynamical systems. Addi-son Wesley Publ. Comp. (1989).

2 OKA,Masatoshi e SUMI,Naoya, ”Morse-Smale Diffeomorphisms and the Standard Family”, TOKYO J. MATH, VOL. 21, No. 2, 1998