INTRODUÇÃO ÀS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Palavras-Chave: Método das características, fluxo, equação do transporte.
Aluno: José Luiz Sobrinho Neto - IMECC
Orientadora: Anne Carolone Bronzi - IMECC

UNICAMP

Resumo

Neste projeto de iniciação científica é proposto o estudo do Método das Características e sua aplicação às Leis de Conservação. Faremos um breve resumo contendo uma breve explicação do método proposto e exposição dos principais resultados e suas demonstrações.

Lei de Conservação Escalar

Introdução

Iniciamos o projeto com uma introdução aos modelos de Leis de Conservação. O Método das Características (que está presente no capítulo 2 da referência [2]) foi estudado com profundidade e aplicado à alguns modelos, como por exemplo no transporte de poluente e na dinâmica de tráfego.

As leis de conservação são equações da forma:

$$u_t + q(u)_x = 0 \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ representa a densidade ou concentração do material em questão com $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. A lei de conservação associada à (1) pode ser obtida integrando (1) com respeito a x de x_1 a x_2:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx = -q(u(x_2,t)) + q(u(x_1,t)) \tag{2}$$

Pensando $q = q(u)$ como a função fluxo e

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dx$$

a quantidade de matéria, temos que (2) representa uma lei de conservação.

Da mesma forma, se partirmos da lei de conservação (2) e se u e f são funções suaves podemos reescrever (2) na forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} (u_t(x,t) + q(u(x,t))_x)\,dx = 0$$

para todo x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, de onde obtemos a equação (1).

Um problema clássico associado a (1) é o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3}$$

onde temos $x \in \mathbb{R}$ podendo variar em um semi-eixo ou em um intervalo e neste caso algumas condições devem ser adicionadas.

Para analisarmos o modelo a ser tomado, devemos identificar a função do fluxo a qual estamos lidando como veremos a seguir, no transporte de poluente $q = q(c) = vc$ e na dinâmica do tráfego $q = q(\rho) = v(\rho)c$

Equação do transporte linear

No caso onde o fluxo é uma função linear teremos a seguinte equação do transporte:

$$\begin{cases} c_t + vc_x = 0 \\ c(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{4}$$

onde $c = c(x,t)$ é a concentração de algum fluido. Queremos determinar a evolução de c sabendo que seu perfil inicial é dado pela função $g = g(x)$. Se introduzirmos o vetor $\mathbf{v} = v\mathbf{i} + \mathbf{j}$ podemos reescrever (4) da forma:

$$0 = vc_x + c_t = \nabla c \cdot \mathbf{v}.$$

Assim, obtemos que ∇c é perpendicular à $\mathbf{v}$. Como ∇c é perpendicular às curvas de nível de c e $\mathbf{v}$ é constante concluímos que as curvas de nível de c são retas da forma $x = vt + x_0$. Essas retas são chamadas de **características**.

Para calcularmos a solução de (4) no ponto $(\bar{x}, \bar{t})$, com $\bar{t} > 0$, tomaremos a característica que passa por $(\bar{x}, \bar{t})$. Se "voltarmos no tempo"por esta reta até chegarmos em $(x_0, 0)$ encontraremos onde há a interseção da característica com o eixo $\mathbf{x}$. Como c é constante ao longo dessa reta e $c(x_0, 0) = g(x_0)$ temos: $c(\bar{x}, \bar{t}) = g(x_0) = g(\bar{x} - v\bar{t})$. Portanto, se $g \in C^1(\mathbb{R})$ a solução de (4) é:

$$c(x,t) = g(x - vt) \tag{5}$$

A equação (5) representa uma **onda viajante** que se move com velocidade v ao longo do eixo $\mathbf{x}$.

Dinâmica do tráfego

Modelo macroscópio

Considere, como exemplo, uma rodovia com tráfego intenso (podendo ser considerado um fluido). O tráfego pode ser descrito através das variáveis densidade de carros, a velocidade média e o fluxo de carros denotadas respectivamente por ρ, v e q que relacionam-se da forma: $q = v\rho$. Vamos supor que não há ultrapassagem entre os carros, a rodovia tem sentido único, não possui engarrafamento, nenhum carro está parado e a velocidade média depende apenas da densidade de carros, ou seja, $v = v(\rho)$. Esse modelo é descrito pela seguinte lei de conservação:

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0 \tag{6}$$

Nessas condições temos a relação: $v(\rho)$ cresce quando ρ decresce e vice-versa, logo $v'(\rho) = \frac{dv}{d\rho} \leq 0$. Definindo os extremos: Se $\rho = 0$ temos $v(\rho) = v_m$ (velocidade máxima) e quando $v(\rho) = 0$ temos

$\rho = \rho_m$ (densidade máxima) que também chamaremos de engarrafamento. Portanto adotaremos a seguinte expressão para $v(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$. Assim, $q(\rho)$:

$$q(\rho) = v_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right). \tag{7}$$

Agora, derivando $q(\rho)$ com respeito a x, obtemos pela regra da cadeia: $q(\rho)_x = q'(\rho)\rho_x = v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x$, logo:

$$\rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) = 0.$$

Adicionando a (7), obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \rho_t + q'(\rho)\rho_x = 0 \\ \rho(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{8}$$

Método das Características

Vamos resolver (8) calculando ρ no ponto (x,t). Assim como fizemos no caso do transporte linear, tomaremos uma característica que está baseada em $(x_0, 0)$, o valor de ρ neste ponto é $\rho(x_0, 0) = g(x_0)$, então é possível determinar a densidade em qualquer ponto (x,t) pertencente à reta, este é o Método das Características.

Assumiremos que $x = x(t)$ é a equação da característica baseada em $(x_0, 0)$, então teremos a densidade inicial (ao longo de $x = x(t)$):

$$\rho(x(t), t) = g(x_0). \tag{9}$$

Derivando (9) com respeito a t:

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \rho_x(x(t), t)x'(t) + \rho_t(x(t), t) = 0 \tag{10}$$

por outro lado, (8) gera:

$$\rho_t(x(t), t) + q'(g_0)\rho_x(x(t), t) = 0. \tag{11}$$

Se subtrairmos (11) de (10), integrarmos no tempo de 0 a t tomando $x(0) = x_0$, obtemos:

$$x(t) = q'(g(x_0))t + x_0. \tag{12}$$

Portanto nossas características são **retas** com inclinação $q'(g(x_0))$. Então estamos aptos a calcular ρ em qualquer ponto (x,t), para isso basta retroceder até a origem da característica que passa por (x,t), ou seja, até o ponto $(x_0, 0)$. Neste ponto teremos $\rho = g(x)$, como ρ é constante nas características, concluímos que $\rho(x,t) = g(x_0)$. De (12) segue que $x_0 = x - q'(g(x_0))t$ e portanto:

$$\rho(x,t) = g(x - q'(g(x_0))t). \tag{13}$$

Esta última fórmula representa uma onda viajante com velocidade $q'(g(x_0))$ ao longo do eixo x. Vale ressaltar que esta é uma velocidade local, não a velocidade do tráfego. Em geral a velocidade local é menor ou igual a do tráfego. A diferença entre elas é evidente quando a local torna-se negativa. De fato, tome $\rho \geq 0$ e $\frac{dv}{d\rho} \leq 0$, temos que $q' = \frac{dq}{d(\rho} = v\rho\frac{dv}{d\rho} \leq v$.

Método das Características generalizado

Aplicando o método anterior ao problema:

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{14}$$

resulta numa onda viajante:

$$u(x,t) = g(x - q'(g(\xi))t), onde q' = \frac{dq}{du} \tag{15}$$

onde $q' = \frac{dq}{du}$ é a velocidade local na direção do eixo x .

Como $u(x,t) \equiv g(\xi)$ ao longo da característica $x = q'(g(\xi)t) + \xi$ baseado em $(\xi, 0)$, (15) estabelece uma relação implícita de u. De fato, seja:

$$G(x,t,u) := u - g(x - q'(u)t) \tag{16}$$

então (15) é equivalente a $G = 0$. Se g e q' são suaves, o Teorema da Função Implícita aplicado à G, implica que u é uma função de (x,t) desde que:

$$G_u = 1 + tq''(u)g'(x - q'(u)t) \neq 0 \tag{17}$$

Se $q''(u) = q''(g(\xi))$ e $g'(x - q'(u)t) = g'(\xi)$ tiverem o mesmo sinal, a solução dada pelo Método da Característica é bem definida em $t \geq 0$. Note que, como $\frac{d}{d\xi} q'(g(\xi)) = q''(g(\xi))g'(\xi) \geq 0$, então a inclinação das retas características, $q'(g(\xi))$, são funções não-decrescentes de ξ, logo não se interceptam.

Proposição 1 *Considere $q \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ tais que $g'(\xi)q''(\xi) \geq 0$ em $\mathbb{R}$. Então*

$$u(x,t) = g(x - q'(u)t)$$

define uma única solução do problema de valor inicial (14) *no semiplano $t \geq 0$. Além disso $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.*

Agora, veremos como Wong [3] aplica o Método das Características para resolver a equação hidrostática de Euler introduzida por Brenier [1].

Equação Hisdrostática de Euler

Consideremos um fluxo sem viscosidade e incompressível em dimensão dois escoando em um canal estreito. Tomando $U = (U_1(t,x), U_2(t,x))$ como a velocidade do fluido e $P = P(t,x)$ a pressão. $x = (x_1, x_2)$ tendo $x_1 \in S^1$ e $0 < x_2 < \varepsilon$, $0 \leq t \leq T$. com isso temos a Equação de Euler com sua respectiva condição de contorno:

$$\begin{cases} (\partial_t + U \cdot \nabla)U + \nabla P = 0 \\ \nabla \cdot U = 0 U_2 = 0 \ em \ x_2 = 0 \ e \ x_2 = \varepsilon \end{cases} \tag{18}$$

Tomando $x_2 \to \varepsilon x_2, U_2 \to \varepsilon U_2$. Como as outras variáveis não se alteram temos campos vetoriais redimensionados com parâmetros (U,P) temos uma Equação de Euler "redimensionada"fixada no domínio: $x \in D = S^1 \times (0,1)$ com sua condição de contorno:

$$\begin{cases} (\partial_t + U.\nabla)U_1 + \partial_{x_1} P = 0 \\ \varepsilon^2(\partial_t + U \cdot \nabla)U_2 + \partial_{x_2} P = 0 \\ U_2 = 0 \ em \ x_2 = 0 \ e \ x_2 = 1. \end{cases} \tag{19}$$

A vorticidade redimensionada Ω é dada por: $\Omega = \partial_{x_2} U_1 - \varepsilon^2 \partial_{x_1} U_2$ e satisfaz a equação: $(\partial_t + U.\nabla)\Omega = 0$.

Seja $\varepsilon = 0$ temos outra expressão para a equação hidrostática de Euler. Definindo (u, p) uma solução suave da equação de Euler, se $u = (u_1(t,x), u_2(t,x))$ e $p = p(t,x)$ que satisfazem, para $x = (x_1, x_2) \in D$ e $t \in [0,T]$, a equação com suas condições de contorno:

$$\begin{cases} (\partial_t + u.\nabla)u_1 + \partial_{x_1} p = 0 \\ \partial_{x_2} p = 0 \\ u_2 = 0 \ em \ x_2 = 0 \ e \ x_2 = 1, \end{cases} \tag{20}$$

com a vorticidade ω, $\omega = \partial_{x_2} u_1$ que resolve $(\partial_t + u.\nabla)\omega = 0$.

Método das Características aplicado à equação hidrostática de Euler

Utilizando o método das características citado acima e tendo como base as ideias de [1] somos capazes de enunciar (prova está em [3]):

Teorema 1 *Seja (u, v, p) solução suave de (20) . Suponha que existem $\hat{x} \in \mathbb{R}$ e uma velocidade horizontal constante $\hat{u} \in \mathbb{R}$ tal que u_0 satisfaça, em $x = \hat{x}$, as seguintes propriedades:*

$$\begin{cases} u_0(\hat{x}, y) \equiv \hat{u}, \forall y \in [0,1], \\ \partial_{xy} u_0(\hat{x}, 0) = 0, \\ \partial_{xyy} u_0(\hat{x}, y) < 0, \forall y \in (0,1) \end{cases} \tag{21}$$

Então existe $T > 0$ tal que se (u, v, p) continuarem suaves no intervalo de tempo $[0, T)$ teremos:

$$\begin{array}{l} \lim_{t \to T^-} max(||u(t)||_{L^\infty}, ||\partial_x p(t)||_{L^\infty}) = +\infty, \quad ou \\ \lim_{t \to T^-} \partial_x u(t, X, (t, \hat{x}1), 1) = -\infty, \end{array}$$

onde $X(t, \hat{x}, 1)$ é a componente x de uma característica baseada em $(\hat{x}, 1)$.

Referências

[1] Brenier, Y. Remarks on the derivation of the hydrostatic euler equations. *Bulletin des sciences mathematiques 127*, 7 (2003), 585–595.

[2] Salsa, S., Vegni, F., Zaretti, A., and Zunino, P. *A primer on PDEs: models, methods, simulations.* Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Wong, T. K. Blowup of solutions of the hydrostatic euler equations. *Proceedings of the American Mathematical Society 143*, 3 (2015), 1119–1125.