XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

MÉTRICAS AD-INVARIANTES EM ÁLGEBRAS DE LIE

Palavras-chave: ÁLGEBRA, ÁLGEBRA LINEAR, MATRIZES

Autores:
MARCOS RICARDO CAVICCHIOLI DE ALMEIDA, IMECC - UNICAMP
Prof$^{\underline{a}}$ Dra. VIVIANA DEL BARCO (Orientadora), IMECC - UNICAMP

---

1 Introdução e metodologia

Este é um projeto de iniciação científica fomentado pela FAPESP, processo de número 2022/07595-9, com início em agosto de 2022 e com término previsto para agosto de 2023.

É notório o papel que grupos de Lie munidos de métricas invariantes à esquerda desempenham no campo da geometria diferencial. Em geral, as propriedades geométricas destas variedades diferenciáveis podem ser estudadas através de elementos algébricos de sua álgebra de Lie, o que permitiu resolver diversos problemas da geometria. Por exemplo, a primeira variedade compacta complexa não Kähler é uma variedade que pode ser apresentada como um quociente compacto de um grupo de Lie nilpotente [5].
Neste projeto, o objetivo principal foi o estudo de álgebras de Lie munidas de métricas ad-invariantes, com um certo foco em espaços de matrizes. Numa primeira instância, se estudou a estrutura de uma álgebra de Lie, que não é nada mais do que um espaço vetorial dotado de uma transformação bilinear que satisfaz certas propriedades (chamada comumente de colchete de Lie), [4]. Como primeiros exemplos foram trabalhados espaços vetoriais notáveis de matrizes, como $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, que são álgebras de Lie clássicas com métricas ad-invariantes [4], [6], [2].

Com o estudo de formas bilineares, a ideia de métrica foi apresentada, bem como o estudo de álgebras de Lie com uma abordagem mais abstrata, [2], [4], [3], [7]. Através do cálculo da forma de Cartan-Killing nos espaços clássicos de matrizes, foi possível verificar que ela pode ser uma métrica ad-invariante. Além disso, se estudou quais as relações existentes entre a estrutura da álgebra de Lie e a existência de uma métrica ad-invariante, através dos conceitos de álgebras de Lie nilpotentes, solúveis e semi-simples.
Na reta final do projeto, se estudará o processo de extensão dupla introduzido por Favre e Santharoubane [1], ainda que em alguns exemplos pontuais. Este processo permite construir álgebras de Lie com métricas ad-invariantes a partir de álgebras com a mesma estrutura, mas com dimensões menores. Podem ser construídas álgebras de Lie de dimensões baixas partindo de álgebras abelianas de dimensão 1 ou 2.

2 Resultados e discussões

2.1 Percepções iniciais

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma álgebra de Lie consiste no par $(V, [\ ,\ ])$ onde*

$$[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$$

é um produto de vetores, chamado colchete (ou comutador) com as seguintes propriedades:

1. *é **bilinear**, isto é, dados α e β em $\mathbb{F}$ e u, v, w, $r \in V$:*

$$[\alpha u + v, w] = \alpha[u, w] + [v, w]$$
$$[u, \beta w + r] = \beta[u, w] + [u, r]$$

2. ***antissimetria**, $\forall\ u \in V$ temos*

$$[u, u] = 0$$

3. *satisfaz a **identidade de Jacobi**, $\forall\ u$, v e $w \in V$ temos:*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Definição 2. *Dada uma álgebra de Lie $(V, [\ ,\ ])$, uma subálgebra é um subespaço vetorial $W \subseteq V$ tal que $(W, [\ ,\ ])$ é álgebra de Lie.*

O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F})$, munido do colchete

$$[A, B] = AB - BA \quad \forall A\,, B \in M_n(\mathbb{F})$$

é uma álgebra de Lie. Sempre que trabalharmos com espaços de matrizes, estaremos nos referindo a este colchete.

Definição 3. *Sejam (V, [,]) e (W, [,]') álgebras de Lie. Uma transformação linear* $T : V \to W$ *é um homomorfismo entre as álgebras de Lie se* $\forall\, u, v \in V$*:*

$$T([u,v]) = [T(u), T(v)]'$$

T será um isomorfismo entre as álgebras de Lie se for um homomorfismo inversível, isto é, injetora e sobrejetora. Caso V=W, dizemos que T é um automorfismo.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, podemos definir para cada $X \in \mathfrak{g}$ a transformação linear $ad_X(Y) = [X, Y]$, ou ainda a transformação $ad : X \longrightarrow ad_X$, de $\mathfrak{g}$ em $End(\mathfrak{g})$, que é o espaço de transformações lineares de $\mathfrak{g}$. Temos que $End(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie com o colchete dado por $[T, S] = T \circ S - S \circ T$, e é possível mostrar através da identidade de Jacobi que ad **é um homomorfismo entre** $\mathfrak{g}$ **e** $End(\mathfrak{g})$, chamado usualmente de **representação adjunta**. Foi possível obter através da representação adjunta que as álgebras de Lie dadas por

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \ | \ X^* = -X,\, tr(X) = 0\}$$
$$\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \ | \ X^t = -X\}$$

são isomorfas. Para cada $X \in \mathfrak{su}(2)$, ad_X é uma transformação linear antissimétrica, e portanto mora em $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Além de ad ser um homomorfismo, pode-se verificar com bases adequadas que este é um isomorfismo de espaços vetoriais. Outro fato interessante é que a álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : tr(X) = 0\}$$

não é isomorfa às anteriores, apesar delas terem a mesma dimensão. Supondo um isomorfismo de álgebras de Lie $T : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$, podemos encontrar $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com um autovalor real não-nulo. Como $T \circ ad_A = ad_{T(A)} \circ T$, segue que ad_A e $ad_{T(A)}$ possuem os mesmos autovalores. Mas vimos que $ad_{T(A)} \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, e transformações antissimétricas não possuem autovalores reais não-nulos. Então, tal isomorfismo T não pode existir.

2.2 Métricas ad-invariantes e a estrutura da álgebra de Lie

Uma forma bilinear em um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ é uma aplicação $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ que é bilinear. O interesse está nas formas bilineares simétricas, ou seja, as formas f tais que $f(u, v) = f(v, u)$, $\forall\, u, v \in V$. Se $dim(V) = n$, há um isomorfismo entre o espaço de funções bilineares simétricas e o espaço das matrizes simétricas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, e podemos associar uma matriz a cada f. Fixando um vetor u, obtemos um funcional linear $f(\overline{u}, v)$ na variável v. Isso define uma aplicação linear $u \longrightarrow L_f(u) = f(\overline{u}, v)$ de V em seu dual V^*. Da mesma forma, obtemos a aplicação linear $v \longrightarrow R_f(v) = f(u, \overline{v})$. Definimos o $rank$ de uma forma bilinear f como sendo a dimensão da imagem de $L_f : V \longrightarrow V^*$ ou de $R_f : V \longrightarrow V^*$, pois estas coincidem. Em dimensão finita, dizemos que f é **não-degenerada** se $rank(f) = dim(V)$, e isto se traduz no fato da matriz que representa f ser invertível, o que independe da base de V.

Definição 4. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Entenderemos como **métrica** uma forma bilinear f sobre $V \times V$ que seja simétrica e não-degenerada.*

Definição 5. *Seja $V(\mathbb{F})$ um espaço vetorial, (V, [,]) álgebra de Lie e B uma forma bilinear em V. Dizemos que B é **ad-invariante** se*

$$B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0$$

$\forall$ X, Y e Z em V.

Seja g uma álgebra de Lie de dimensão finita. Definimos sua **forma de Cartan-Killing** como:

$$\kappa(X, Y) = \text{traço}(ad_X \circ ad_Y)$$

Segue das propriedades da função traço que está é uma forma bilinear simétrica.

Teorema 1. *A forma de Cartan-Killing é ad-invariante.*

Demonstração. Sejam X, Y e Z em $\mathfrak{g}$. Utilizando que $tr(BA)$=$tr(AB)$, obtemos que $tr([X, Y]Z) = -tr(Y[X, Z])$. Além disso, como ad é um homomorfismo, segue que $ad_{[X,Y]}$=$[ad_X, ad_Y]$. Daí:

$$\begin{aligned}
\kappa(ad_X(Y), Z) &= tr(ad_{[X,Y]}ad_Z) \\
&= tr([ad_X, ad_Y]ad_Z) \\
&= -tr(ad_Y[ad_X, ad_Z]) \\
&= -\kappa(Y, [X, Z]) \\
&= -\kappa(Y, ad_X(Z))
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\kappa(ad_X(Y), Z) + \kappa(Y, ad_X(Z)) = 0$$

Ou seja, a forma de Cartan-Killing é uma métrica ad-invariante sempre que for não-degenerada. Com cálculos, podemos verificar que isto ocorre em $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ por exemplo. Foi investigado se é possível saber quando uma forma de Cartan-Killing serve ou não como uma métrica ad-invariante, e isto é apresentado no teorema 2 (ver [3], seção 5) e no teorema 3 (ver [4], capítulo 3).

Definição 6. *Um **ideal** é um subespaço $H \subset V$ tal que $\forall\, x \in H$ e $y \in V$ temos*

$$[x, y] \in H$$

Definição 7. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com dim($\mathfrak{g}$) $\neq 1$ é dita **simples** se seus únicos ideais são 0 e $\mathfrak{g}$. Isto é, as álgebras simples são aquelas que não possuem ideais além dos triviais. Uma álgebra de Lie g é **semi-simples** se for soma direta de álgebras de Lie simples.*

Teorema 2. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e só se sua forma de Cartan-Killing $\kappa(X,Y)$ é não-degenerada.*

Foi possível verificar que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ são simples, e portanto estão munidas de uma métrica ad-invariante dada pela forma de Cartan-Killing. Resta agora saber quando a forma de Cartan-Killing é, com certeza, degenerada, o que nos obriga a procurar outra métrica ad-invariante na álgebra de Lie.
Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos indutivamente sua série derivada da seguinte forma:

$$\mathfrak{g}^0 \;=\; \mathfrak{g} \quad ; \quad \mathfrak{g}^{k+1} \;=\; [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k]$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é solúvel se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$. Em relação a álgebras de Lie com essa estrutura, temos que:

Teorema 3. *(Critério de Cartan) Uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e só se $\kappa(X,Y) = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ e Y em $\mathfrak{g}$.*

Nestes casos, a forma de Cartan-Killing é sempre degenerada. Entretanto, existem álgebras de Lie solúveis dotadas de métricas ad-invariantes, como por exemplo a subálgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$:

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} |x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

Referências

[1] G. Favre and L. J. Santharoubane. Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear forms on a lie algebra. *Journal of Algebra*, (105):451–464, 1987.

[2] K. Hoffmann and R. Kunze. *Linear Algebra (2nd Edition)*. Pearson, 1971.

[3] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, 1972.

[4] L.A.B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.

[5] J. Oprea and A. Tralle. *Symplectic manifolds with no Kähler structure*. Volume 1661 of *LNM*, Springer-Verlag, 1997.

[6] Wulf Rossmann. *Lie Groups: An Introduction through Linear Groups*. Oxford University Press, 2006.

[7] G. Ovando V. del Barco and F. Vittone. On the isometry groups of invariant lorentzian metrics on the heisenberg group. *Mediterr. J. Math*, (11(1)):137–153, 2014.