XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

A EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL E N-DIMENSIONAL

Palavras chaves : Equações diferenciais parciais, Equação do calor, Equações parabólicas

Autores
MAYCON BRUNO DA SILVA SANTOS [IMECC - UNICAMP]
Prof.ª Dr.ª BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA [IMECC - UNICAMP]

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais têm várias aplicações importantes em diversas áreas da ciência servindo como ferramenta para resolver problemas utilizando modelos matemáticos.

Nesse trabalho, foram estudadas a existência, a unicidade e outras propriedades da solução da equação do calor.

METODOLOGIA

Inicialmente foram estudadas as séries de Fourier e suas propriedades como base teórica para a solução da equação do calor unidimensional. Em seguida, foram estudadas a dedução da equação do calor unidimensional em uma barra uniforme e as soluções de problemas de valor inicial e de contorno. Em seguida foi estudado o caso não homogêneo e por fim o problema da equação do calor n-dimensional.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Dada uma barra homogênea, seja $u(x, t)$ a função da temperatura em relação à posição x da barra e ao tempo t. Então a equação do calor unidimensional é dada por

$$u_t = Ku_{xx}.$$

Agora, considere o problema da barra homogênea de tamanho L com extremidades mantidas a 0°C e com condição inicial $u(x,0) = f(x)$. Este é descrito por

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx}\\&u(0,t) = u(L,t) = 0,\\&u(x,0) = f(x).\end{aligned}$$

Para solução desse problema é usado o método separação de variáveis, que consiste em procurar uma solução da forma $u_n = X(x)T(t)$. Calculando $X(x)$ e $T(t)$, tem-se que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

onde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Para calcular c_n, utiliza-se séries de Fourier e obtem-se que

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Analogamente, considerando $u(x,0) = f(x)$, foram analisados as diferentes soluções obtidas ao variar as condições de contorno no qual as extremidades da barra estavam submetidas. As condições analisadas foram

$$\begin{aligned}&u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,\\&u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0,\\&u(0,t) = \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \quad t \geq 0,\\&u(0,t) = h_1(t), \quad u(L,t) = h_2(t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Caso haja uma fonte externa de calor, a equação do calor se torna

$$u_t = Ku_{xx} + g(x,t),$$

e considerando o seguinte problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx} + g(x,t),\\&u(0,t) = u(L,t) = 0,\\&u(x,0) = f(x),\end{aligned}$$

e que

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

temos que a solução será

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde

$$c_n(t) = c_n(0) exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}\right) + exp\left(-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}\right) \int g_n(s) exp\left(\frac{n^2\pi^2 Ks}{L^2}\right) ds,$$

$$c_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Foi mostrado a existência da solução equação do calor unidimensional. Em relação à unicidade, temos o seguinte teorema.

Teorema 1. A solução da equação do calor unidimensional é única.

No problema analisado, foi mostrado uma solução das condições de valor inicial e de contorno. Para mostrar que essa solução é única, como diz o teorema, foi utilizado o Princípio do Máximo.

Teorema 2.(Princípio do máximo). Seja $u(x,t)$ uma função contínua no retângulo $X = \{(x,t) : x_1 \leq x \leq x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}$ e tal que $u_t = Ku_{xx}$, para $x_1 < x < x_2$ e $t_1 < t < t_2$. Então o máximo e o mínimo de u são assumidos em um dos seguintes lados de X

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x = x_1, t_1 \leq t \leq t_2\}, \\ L_2 &= \{x = x_2, t_1 \leq t \leq t_2\}, \\ L_3 &= \{x_1 \leq x \leq x_2, t = t_1\}. \end{aligned}$$

No caso n-dimensional, considerando $u(x,t)$ como a temperatura em função de $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in (0,\infty)$, temos que a equação diferencial que modela esse fenômeno é dado por

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Existe uma solução dessa equação diferencial chamada de solução fundamental, que é dada por

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

para $t > 0$, e

$$\phi(x,t) = 0$$

para $t < 0$.

Agora, considerando uma distribuição inicial de calor $u(x,0) = g(x)$, temos que a solução da equação do calor será

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y,t) g(y) dy.$$

CONCLUSÃO

A equação do calor, embora possa parecer simples de início, leva a problemas complexos e interessantes, que pode servir de base para outros problemas importantes. A modelagem matemática é extremamente importante nesses casos, pois ao estudar os princípios matemáticos que guiam algum fenômeno ou comportamento, podemos justificar rigorosamente aquilo que é observado empiricamente e fazer previsões significativas.

BIBLIOGRAFIA

[1] EVANS, Lawrence Craig. Partial Differential Equations. 2nd Edition, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, American Mathematical Society, 2010.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.