Categorias e aplicações à Geometria Algébrica e à Topologia Algébrica

Diana Hernandes Arriel, IMECC - Unicamp
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (orientador), IMECC - Unicamp

Palavras-chave: Categorias, Equivalência-de-Categorias, Quivers

Resumo

Esse projeto tem como foco estudar a Teoria de Categorias e algumas aplicações de interesse na Topologia Algébrica e na Geometria Algébrica como o grupo fundamental, o grupóide fundamental, os quivers e as categorias abelianas.

1 Introdução

A matemática é repleta de construções que traduzem objetos matemáticos de um tipo em outro. A teoria de categorias busca generalizar a maneira que transitamos por essas diferentes estruturas matemáticas.Esse processo pode ser formalizado através da equivalência de categorias.

A introdução desse conceito nos possibilita mostrar que a categoria $\operatorname{Rep} Q$, das representações de quivers, é equivalente à categoria $mod - A$ dos módulos de dimensão finita de A, onde A é a álgebra de caminhos do quiver Q. Assim, podemos transportar um problema da categoria $mod - A$ em um problema na categoria $\operatorname{Rep} Q$ e vice-versa.

2 Teoria das Categorias

2.1 Categorias

Definição 2.1 (Categoria)**.** *Uma categoria C consiste em:*

- *uma classe* $\operatorname{ob}(C)$ *de objetos* X, Y, Z, ...;
- *uma classe* $\hom(C)$ *de morfismos* f, g, h, ...;

munidas das operações:

- *Domínio: associa a cada morfismo* $f \in \hom(C)$ *um objeto* $X = \operatorname{dom} f \in \operatorname{ob}(C)$;
- *Contra-domínio: associa a cada morfismo* $f \in \hom(C)$ *um objeto* $Y = \operatorname{cod} f \in \operatorname{ob}(C)$;

  A notação $f : X \to Y$ *é usada para expressar que* f *é um morfismo com* $\operatorname{dom} f = X$ *e* $\operatorname{cod} f = Y$.
- *Identidade: associa a cada objeto* $X \in \operatorname{ob}(C)$ *um morfismo identidade* $1_X : X \to X$;
- *Composição: associa a cada par* $\langle g, f \rangle$ *de flechas com* $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ *uma flecha* $g \circ f$;

onde a composição é associativa e para qualquer $f : X \to Y \in \hom(C)$, $f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f$.

Como exemplo podemos citar a categoria Set, onde os objetos são conjuntos, os morfismos são funções e a composição é a usual para funções. O mesmo vale para grupos e homomorfismos, que formam a categoria Grp; espaços topológicos e funções contínuas, que constituem a categoria Top; e espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e transformações lineares, cuja categoria é denotada por $Vect_{\mathbb{K}}$.

Uma vantagem que as categorias trazem é um conceito geral de isomorfismos:

Definição 2.2 (Isomorfismo)**.** *Um isomorfismo em uma categoria é um morfismo $f : X \to Y$ para o qual existe morfismo $g : Y \to X$ de modo que $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$. Os objetos X e Y são isomorfos sempre que existir isomorfismo entre eles, nesse caso, escrevemos $X \simeq Y$.*

Assim, bijeções determinam os isomorfismos em Set, isomorfismos de grupos determinam os isomorfismos em Grp e homeomorfismos determinam os isomorfismos em Top.

Definição 2.3 (Grupóide)**.** *Um grupóide é uma categoria na qual todo morfismo é um isomorfismo.*

Exemplo 2.4. *Um grupo é um grupóide com um objeto.*

Exemplo 2.5 (Grupóide Fundamental)**.** *Para qualque espaço X, seu grupóide fundamental $\Pi_1(X)$ é uma categoria cujos objetos são pontos de X e os morfismos são classes de homotopia de caminhos que preservam o ponto final e inicial. Essa categoria é um grupóide.*

Lema 2.6. *Qualquer categoria C contém um grupóide maximal, a subcategoria que contém todos os objetos e apenas os morfismos que são isomorfismos.*

2.2 Funtores

Definição 2.7 (Funtor)**.** *Sejam C e D categorias. Um funtor covariante $F : C \to D$ consiste em:*

1. *Uma aplicação entre $\mathrm{ob}(C)$ e $\mathrm{ob}(D)$ que associa X a $F(X)$;*
2. *Uma aplicação entre $\hom(C)$ e $\hom(D)$ que associa $\phi \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ a $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$ tal que: $F(1_X) = 1_{F(X)} \quad \forall X \in \mathrm{ob}(C), \quad F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi) \quad \forall \phi, \psi \in \hom(C)$, quando $\phi \circ \psi$ for bem definida.*

Analogamente, definimos um funtor contravariante $F : C \to D$, nesse caso, $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_D(F(Y), F(X))$ quando $\phi \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ e $F(\phi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\phi)\ \forall\, \phi, \psi \in \hom(C)$ quando $\phi \circ \psi$ for bem definida.

Um exemplo de funtor que podemos citar é o funtor esquecimento. Entre eles, temos o funtor $F : Grp \to Set$, onde $F(G) = G \in \mathrm{ob}(Set)$ e $F(\phi) = \phi \in \hom(Set)$. Dentre outros exemplos, temos:

Exemplo 2.8 ($\mathrm{Hom}(X, \_)$)**.** *Dada uma subcategoria localmente pequena C e $X \in \mathrm{ob}(C)$, o funtor $\mathrm{Hom}(X, \_) : C \to Set$, onde para cada objeto Y de C temos $\mathrm{Hom}(X, \_)(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$ para $Y \in \mathrm{ob}(C)$, e para cada morfismo $f : Y \to Y'$, definimos $\mathrm{Hom}(X, \_)(f) : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y')$ de modo que, para $\phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $\mathrm{Hom}(X, \_)(f)(\phi) = f \circ \phi \in \mathrm{Hom}(X, Y')$, é um funtor covariante.*

De maneira análoga, podemos definir um funtor contravariante $\mathrm{Hom}(\_, X)$, onde para cada objeto $Y \in C$ temos $\mathrm{Hom}(\_, X)(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$, e para cada morfismo $f : Y \to Y'$, definimos $\mathrm{Hom}(\_, X)(f) : \mathrm{Hom}(Y', X) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$, de modo que, para $\phi \in \mathrm{Hom}(Y', X)$, $\mathrm{Hom}(\_, X)(f)(\phi) = \phi \circ f \in \mathrm{Hom}(Y, X)$.

Exemplo 2.9 ($\pi_1 : Top^* \to Group$)**.** *A categoria Top^* é a categoria de espaços topológicos baseados em um ponto e funções contínuas que preservam esse ponto.*

O funtor π_1, como seu nome sugere, mapeia um espaço topológico X baseado em um ponto $x \in X$, que denotamos por (X, x) em seu grupo fundamental $\pi_1(X, x)$.

Exemplo 2.10 ($\Pi_1 : Top \to Grupoid$)**.** *A categoria Grupoid é uma subcategoria da categoria Cat, seus objetos $\Pi_1(X) \in \mathrm{ob}(Grupoid)$ são categorias e seus morfismos são funtores entre os objetos. Dado um espaço topológico X, os objetos de $\Pi_1(X)$ são os pontos de X; os morfismos $[\gamma] : p \to q$ são as classes de homotopia de caminhos de p a q que preservam p e q e a composição é dada pela concatenação de caminhos.*

O funtor Π_1 mapeia objetos $X \in Top$ em categorias $\Pi_1(X) \in \mathrm{ob}(Grupoid)$ e mapeia funções contínuas $f : X \to Y$ em funtores $\Pi_1(f) : \Pi_1(X) \to \Pi_1(Y)$ onde:

$$\Pi_1(f)(x) = f(x) = y \in Y \quad \forall\, x \in X, \qquad \Pi_1(f)([\gamma]) = [f \circ \gamma] \in \Pi_1(Y) \quad \forall\, [\gamma] \in \Pi_1(X).$$

Definição 2.11. *Seja $F : C \to D$ um funtor entre duas categorias.*

1. *Dizemos que F é fiel se para quaisquer $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ temos que:*

   $F : \mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$ é injetivo.

2. *Dizemos que F é pleno se para quaisquer $X, Y \in \mathrm{ob}(C)$ temos que:*

   $F : \mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$ é sobrejetivo.

2.3 Transformações Naturais

Definição 2.12 (Transformação natural)**.** *Dadas categorias C e D e funtores $F, G : C \rightrightarrows D$, uma transformação natural $\alpha : F \Rightarrow G$ consiste em uma coleção de morfismos $\alpha_c : Fc \to Gc$ em D, um para cada objeto $c \in C$, que define os componentes da transformação natural de modo que, para qualquer morfismo $f : c \to c'$, o seguinte diagrama de morfismos em D:*

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "Ff"] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & Gc' \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\alpha_{c'} \circ Ff = Gf \circ \alpha_c$.

Definição 2.13 (Isomorfismo natural)**.** *Sejam $F : C \to D$ e $G : C \to D$ funtores entre categorias. Dizemos que F e G são isomorfos se dada $\phi : F \Rightarrow G$ transformação natural, existe $\psi : G \Rightarrow F$ tal que:*

$$\psi \circ \phi = 1_F \quad e \quad \phi \circ \psi = 1_G,$$

isto é equivalente a dizermos que $\phi(X) : F(X) \to G(X)$ é isomorfismo para todo $X \in \mathrm{ob}(C)$.

Teorema 2.14 (Lema de Yoneda)**.** *Para qualquer funtor $F : C \to Set$ cujo domínio C é localmente pequeno e qualquer objeto $X \in C$, existe uma bijeção $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(X, \_), F) \simeq F(X)$ que associa a transformação natural $\gamma : \mathrm{Hom}(X, \_) \Rightarrow F$ ao elemento $\gamma_X(1_X) \in F(X)$*

É possível mostrar que o Lema de Yoneda pode ser interpretado como uma generalização do Teorema de Cayley, que garante que todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações apropriado.

Definição 2.15 (Equivalência de Categorias)**.** *Sejam C e D duas categorias e $F : C \to D$ um funtor. Dizemos que F é equivalência de categorias se existe um funtor $G : D \to C$ tal que $G \circ F$ é isomorfo ao funtor id_C e $F \circ G$ é isomorfo ao funtor id_D.*

Nesse caso, dizemos que C e D são equivalentes e que o funtor G é quasi-inverso a F.

Teorema 2.16. *Sejam C e D categorias e $F : C \to D$ um funtor. Então F é equivalência de categorias se, e somente se, F é um funtor pleno, fiel e essencialmente sobrejetivo.*

Como consequência deste teorema, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.17. *Seja $F : C \to D$ um funtor pleno e fiel. Então C é equivalente a uma subcategoria plena de D.*

3 Quivers

Definição 3.1 (Quiver)**.** *Um quiver Q é um par (Q_0, Q_1), onde Q_0 é um conjunto de vértices e Q_1 é um conjunto de flechas. Junto a este par, temos dois mapas, início, denotado por t e término, h, dados por:*

$$\begin{aligned} t, h : Q_1 &\to Q_0 \\ a &\mapsto t(a), h(a). \end{aligned}$$

Definição 3.2. *Sejam Q um quiver e C uma categoria. Uma representação de Q em C consiste em:*

- *uma coleção $\{V_i : i \in Q_0\}$, com $V_i \in \mathrm{ob}(C)$;*
- *uma coleção $\{\phi_a : V_{t(a)} \to V h(a) : a \in Q_1\}$, onde $\phi_a \in \mathrm{Hom}_C(V_{t(a)}, V_{h(a)})$.*

Definição 3.3 (Morfismo de representações)**.** *Sejam (V, ϕ) e (W, ψ) duas representações de Q. Um morfismo $f : V \to W$ é uma coleção de morfismos $f_i \in \mathrm{Hom}_C(V_i, W_i)$, $i \in Q_0$, tal que, para cada flecha $a \in Q_1$, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

isto é, $\psi_a \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_a$, $\forall\, a \in Q_1$.

Podemos notar que um morfismo de representações de quivers é uma transformação natural.

A partir dessas definições, dada uma categoria C, podemos introduzir a categoria $\mathrm{Rep}_C\, Q$, onde os objetos são representações de quivers e os mosfismos são morfismos de representações. Dado um corpo k, convencionamos $\mathrm{Rep}_{Vect_k}\, Q = \mathrm{Rep}\, Q$

Definição 3.4. *Um caminho em Q é uma sequência $p = a_1 a_2 \dots a_n$ tal que $h(a_{i+1}) = t(a_i)$, $i = 1, \dots, n-1$.*

$$\xrightarrow{a_n} \xrightarrow{a_{n-1}} \dots \xrightarrow{a_2} \xrightarrow{a_1} .$$

O caminho começa em $t(a_n)$ e termina em $h(a_1)$. Para cada vértice $i \in Q_0$ denotamos por e_i o caminho trivial, que começa e termina em i.

Definição 3.5 (Álgebra de caminhos)**.** *Seja k um corpo. A álgebra de caminhos kQ associada ao Quiver Q é o k-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos em Q, com o produto dado por concatenação, isto é, se $p = a_1 a_2 \dots a_n$ e $q = b_1 b_2 \dots b_m$ são caminhos, temos:*

$$pq = \begin{cases} a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m, & se\ t(p) = t(q) \\ 0 \quad , & caso\ contrário. \end{cases}$$

Também temos:

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j. \end{cases} \qquad e_i p = \begin{cases} p, & se \quad i = h(p) \\ 0, & se \quad i \neq h(p). \end{cases} \qquad p e_i = \begin{cases} p, & se \quad i = t(p) \\ 0, & se \quad i \neq t(p). \end{cases}$$

A álgebra de caminhos tem unidade dada por $\sum_{i \in Q_0} e_i$.

Podemos relacionar a álgebra de caminhos à categoria $\operatorname{Rep} Q$ através do seguinte resultado:

Proposição 3.6. *Seja Q um quiver e A sua álgebra de caminhos. Então a categoria de representações de Q, $\operatorname{Rep} Q$, é equivalente à categoria dos A-módulos de dimensão finita, $mod - A$.*

Para demonstrar essa importante equivalência de categorias, primeiramente construímos um funtor $F : \operatorname{Rep} Q \to mod - A$ tal que, para $(V, \phi) \in \operatorname{ob}(\operatorname{Rep} Q)$:

$$F(V, \phi) = \overline{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

,

onde $\bigoplus V_i$ é a soma direta externa de espaços vetoriais. Podemos mostrar que $\bigoplus V_i$ tem, de fato, estrutura de $A -$ módulo por meio de um homomorfismo $\rho : A \to End(\overline{V})$.

Já para $f : (V, \phi) \to (W, \psi) \in \operatorname{hom}(\operatorname{Rep} Q)$, o homomorfismo de $A -$ módulos, $F(f) = \overline{f} : \overline{V} \to \overline{W}$, será dado por $\overline{f} = \bigoplus_{i \in Q_0} f_i$.

A partir disso, podemos construir um funtor $G : mod - A \to \operatorname{Rep} Q$ tal que $G \circ F \simeq id_{\operatorname{Rep} Q}$ e $F \circ G \simeq id_{mod_A}$. Equivalentemente, por 2.16, podemos mostrar que F é pleno, fiel e essencialmente sobrejetivo. Assim, temos a equivalência de categorias desejada.

Referências

[1] M. A. Armstrong. *Basic Topology.* Springer, 1983. ISBN: 9780387908397.

[2] Márcio Palmares Pinto de França. *Lema de Yoneda: uma introdução à Teoria de Categorias (guia auxiliar para iniciantes).* 2018. URL: https://hdl.handle.net/1884/57890.

[3] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 1998. ISBN: 0-387-98403-8.

[4] D. M. Prata. "Representações Torcidas de Quivers". Diss. de mestr. Universidade Estadual de Campinas, 2008.

[5] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. ISBN: 9780486820804. URL: https://books.google.com.br/books?id=6B9MDgAAQBAJ.