XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

Aplicação das séries de Fourier na resolução do problema isoperimétrico

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Parciais, Análise de Fourier, Problema Isoperimétrico

Autores:
Gustavo Kerdole Gontijo, Unicamp
Prof. Dr. João Vitor da Silva (Orientador), Unicamp

1 Resumo

O projeto de pesquisa, cujo título original é *Aplicações das séries de Fourier na resolução de equações diferenciais parciais do mundo real*, teve como objetivo final desenvolver uma abordagem matemática para resolução de problemas envolvendo algumas equações diferenciais parciais (EDPs, de forma abreviada). Especificamente, nossa proposta buscou desenvolver o método de Fourier como opção de resolução de problemas relevantes oriundos por exemplo da Física, dos quais podemos citar a condução do calor numa barra fixa, o problema das vibrações numa corda, ou o problema de Dirichlet governado pela equação de Laplace. Tal método de Fourier se mostra bastante acessível, facilitando assim a resolução de alguns problemas modelados por EDPs, o que o torna uma poderosa ferramenta matemática. Desse modo, estudou-se as séries de Fourier para, em seguida, utilizá-las na obtenção de resultados importantes, dentre os quais escolheu-se a prova da desigualdade isoperimétrica para ser o assunto a ser abordado no congresso.

2 Introdução

As séries de Fourier levam o nome de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), um matemático e físico francês que desenvolveu diversos trabalhos experimentais e teóricos sobre a propagação do calor. Embora o objetivo inicial de Joseph Fourier fosse resolver a equação do calor a partir das séries trigonométricas, depois que seu método foi estudado e encontrado, ele foi sendo utilizado para resolver muitos problemas matemáticos e físicos e, em especial, os que continham equações diferenciais. Esse estudo, conhecido hoje por Série de Fourier, tem aplicação direta nas áreas da engenharia elétrica, análise de vibrações, acústica, óptica, processamento de sinais, processamento de imagens e econometria. Aqui, iremos utilizá-la para demonstrar a desigualdade isoperimétrica no plano, um importante teorema que relaciona área e perímetro de uma curva fechada.

3 Desenvolvimento das atividades

Durante a primeira metade da iniciação científica o estudo foi direcionado às próprias séries de Fourier, compreendendo sua definição, conhecendo suas propriedades, bem como teoremas relacionados. Em seguida, buscou-se utilizar as ferramentas estudadas para obter a solução do problema isoperimétrico no plano.

Na outra parcela do programa, utilizou-se os conceitos vistos para estudar o problema da condução de calor em uma barra. Assim, aplicou-se o método de Fourier para encontrar uma solução para a equação do calor. Além disso, trabalhou-se melhor em cima do sentido da solução procurada para este problema, acrescentando maior rigor para a análise. Contudo, essa segunda parte não será apresentada no congresso.

As principais bibliografias utilizadas foram os livros *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, do Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo [1], e *O Problema Isoperimétrico*, de Miriam Telechevesky e Patrícia Klaser [3].

4 Série de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Podemos escrever:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

A expressão do lado direito é a **série de Fourier**.

Suponha que a igualdade entre a função f e sua série de Fourier, representada acima, se verifica e que a série convirja uniformemente:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Assim, manipulando e integrando essa equação, obtemos os **coeficientes de Fourier** da função f:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n \geq 0,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n \geq 1.$$

Teorema 1 *(Teorema de Fourier): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a série de Fourier da função f converge da seguinte maneira:*

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que

$$f(a+0) = \lim_{x\to a^+} f(x),$$
$$f(a-0) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Corolário 1 *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua de classe C^2 por partes e tal que $f(0) = f(1)$. Então os coeficientes da série de Fourier de f', que converge, podem ser obtidos a partir da série de Fourier de f derivando termo a termo essa série.*

4.1 Identidade de Parseval

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, onde f, $|f|$ e $|f|^2$ são integráveis, vimos que se podem calcular seus coeficientes de Fourier a_n e b_n. Assim, temos a Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx.$$

Corolário 2 *Se $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas de classe C^1 por partes, tais que $f(0) = f(1)$ e $g(0) = g(1)$, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f e c_n e d_n os de g, então*

$$\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = 2\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

5 A desigualdade isoperimétrica

O problema isoperimétrico no plano consiste em:

Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.

Apesar de ser um problema matemático antigo, ele continua relevante, visto que ainda estão sendo formuladas suas generalizações[1], e objetos matemáticos que foram desenvolvidos no seu estudo seguem sendo amplamente utilizados como ferramentas em outros contextos. Nossa intenção é demonstrar a solução deste problema a partir do aparato que as séries de Fourier nos oferece. A seguir, está enunciado a desigualdade que iremos provar na sequência.

Teorema 2 *(A desigualdade isoperimétrica): A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C, de comprimento L, satisfaz à desigualdade*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, C for um círculo.

Lembrando que uma curva $C = \gamma(t) : t \in [a,b]$ será fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$, e será simples se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, para $a < t_1 < t_2 < b$.

Ademais, a curva C será retificável se ela corresponder a um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ que é uma função de variação limitada, isto é, existe uma constante $K > 0$, tal que para qualquer partição $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ do intervalo $[a,b]$, tem-se $\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq K$. A menor constante K assim será o comprimento L da curva C.

[1]Consistem em considerar o problema para dimensões maiores, como em $\mathbb{R}^3$, no qual nosso interesse seria encontrar a superfície de área fixada A que engloba o maior volume possível.

5.1 Prova da desigualdade isoperimétrica

Seja C uma curva fechada simples de classe C^1 por partes de comprimento L que engloba uma área A. Considere uma parametrização $\tilde{\gamma}$ de C por comprimento de arco, isto é, $\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ e $\tilde{x}'^2(s) + \tilde{y}'^2(s) = 1$ sempre que $\tilde{x}'$ e $\tilde{y}'$ estiverem bem definidas.

Podemos reparametrizar C com funções x e y definidas em $[0,1]$ via $x(t) = \tilde{x}(Lt)$ e $y(t) = \tilde{y}(Lt)$. Assim, $x'^2(s) + y'^2(s) = L^2$ para $t \in [0,1]$, no qual a expressão faz sentido, o que ocorre exceto em um conjunto finito de pontos.

Usando o teorema de Fourier para as funções x e y, temos que

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t\right),$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t\right).$$

Derivando, de acordo com o Corolário 1, obtemos

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi \left(-a_n \sin 2n\pi t + b_n \cos 2n\pi t\right),$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi \left(-c_n \sin 2n\pi t + d_n \cos 2n\pi t\right).$$

Pela Identidade de Parceval aplicada às funções x' e y', temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 2\int_0^1 |x'(t)|^2 dt$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2 \left(c_n^2 + d_n^2\right) = 2\int_0^1 |y'(t)|^2 dt.$$

Somando as duas igualdades

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2 \left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right) = \int_0^1 |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 dt = L^2.$$

Utilizando o Teorema de Green (versão particular do mesmo), temos que a área da região confinada pela curva fechada C é dada por

$$A = \int_0^1 x(t)y'(t)dt,$$

Daí pelo Corolário 2,

$$2\int_0^1 x(t)y'(t)dt = \frac{a_0\widehat{c}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\widehat{c}_n + b_n\widehat{d}_n\right).$$

$$2A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n 2n\pi d_n + b_n 2n\pi(-c_n)\right) \Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \left(a_n d_n - b_n c_n\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L^2 - 4\pi A &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2 \left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right) - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \left(a_n d_n - b_n c_n\right) \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n)^2 + (nb_n)^2 + (nc_n)^2 + (nd_n)^2 - 2na_n d_n + 2nb_n c_n\right) \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2-1) + d_n^2(n^2-1)\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\therefore A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para todo $n > 1$ e $b_1 = -c_1 = -c$ e $a_1 = d_1 = d$, ou seja,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d\cos 2\pi t - c\sin 2\pi t$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c\cos 2\pi t + d\sin 2\pi t$$

Que podemos facilmente perceber que corresponde a um círculo de raio $\sqrt{c^2 + d^2}$ e centro $(a_0/2, c_0/2)$.

$\square$

6 Conclusão

Portanto, vimos que partir de um primeiro contato com a teoria, foi possível utilizar as ferramentas adquiridas para obter o resultado de um antigo problema da matemática: a desigualdade isoperimétrica. Dessa forma, o estudo das séries de Fourier se mostra ser muito interessante, visto que possuem diversas aplicações práticas e não envolvem muitos conceitos complicados, sendo assim uma boa escolha de projeto para quem está iniciando sua experiência na iniciação científica.

7 Referências

(1) de Figueiredo, Djairo Guedes. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014. 274 pp. ISBN: 978-85-244-0120-6 42-01;

(2) William E. Boyce e Richard C. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*;

(3) KLASER, Patrícia Kruse; TELICHEVESKY, Miriam. *O problema isoperimétrico.* V Colóquio de Matemática da Região Sul. 1 a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016, 66p;

(4) Melissa S. Holetz (2001), *Método de Fourier para a resolução de Problemas de Valores Inicial e de Fronteira para a Equação do Calor.*