Propriedades Geométricas de Espaços de Probabilidade

Palavras-Chave: Probabilidade, Transporte Ótimo, Sistemas Dinâmicos

Autores(as):

MAYCK BRANDO SANTOS MOREIRA, IMECC – UNICAMP

Prof. Dr. CHRISTIAN DA SILVA RODRIGUES, IMECC- UNICAMP

INTRODUÇÃO:

O trabalho possui o objetivo de investigar as propriedades geométricas apresentadas pelos espaços de probabilidade por meio de técnicas e ferramentas de Transporte Ótimo, focando o estudo em espaços de probabilidade poloneses.

METODOLOGIA:

A pesquisa se desenvolveu principalmente com base em revisão bibliográfica do livro *Optimal Transport: Old and New* ,onde se apresentam os conceitos de Transporte Ótimo e a aplicação deles a espaços de probabilidade, bem como em bibliografias complementares como *The Elements of Integration and Lesbegue Measure,* onde são abrodadas as bases da teoria da media e da integração. Nestas bibliografias constam as ferramentas básicas e os conceitos usados para desenvolver a pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

A investigação permitiu constatar que propriedades geométricas de espaços de probabilidade P podem ser identificadas associando-se a eles a espaços medidas de probabilidade (P, μ) com o espaço P como suporte e explorando os caminhos minimizantes que podem ser determinados nestes espaços de medida, bem como estruturas relacionadas a estes caminhos tais como espaços tangentes.

A principal técnica explorada neste estudo para determinar os caminhos minimizantes foi a Interpolação de Deslocamento, que no nosso caso consiste em encontrar uma curva contínua γ no espaço de medidas de probabilidade tal que as medidas μ_0 e μ_1 escolhidas estejam em γ e obtenhamos o menor custo possível de deslocamento ao longo desta curva, o qual é determinado pela ação minimizante do lagrangiano; em termos matemáticos, podemos definir o procedimento de Interpolação de Deslocamento como: Dadas medidas μ_0 , μ_1 e um lagrangiano L, tomamos a ação lagrangiana $A(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$ e tomamos γ contínua tal que $c(\mu_0, \mu_1) = \inf\{A(\gamma): \gamma_0 = \mu_0 \; e \; \gamma_1 = \mu_1)$, permitindo assim determinar geodésicas nos espaços de medidas de probabilidade associados.

Como o suporte do espaço de medidas de probabilidade é o espaço P, por meio da determinação desta curva γ obtemos uma geodésica no espaço de probabilidade P, isto é, uma curva minimizante cujos pontos são elementos do espaço de probabilidade, o que permite uma forma de otimização de caráter geométrico e a determinação de uma estrutura contínua em P a partir do espaço de medida de probabilidade (P, μ).

Juntamente com a curva γ também obtemos formas de determinar estruturas como os espaços tangentes aos pontos dela, visto que a curva determinada é diferenciável e assim podemos determinar espaços tangentes a espaços de probabilidade dados, podendo assim explorar estruturas de diferenciação, o que permite falar em derivadas no contexto de probabilidades e em relações de covariância. Outra possibilidade viabilizada pela determinação desta estrutura de diferenciação é a possibilidade de se falar em perpendicularidade a partir desses espaços tangentes entre as probabilidades, estabelecendo uma forma de estabelecer relações de independência entre elas.

Com esta estrutura de diferenciação em P, apresenta-se uma via natural para se definir uma estrutura de integração por caminhos, visto que podemos definir a integração ao longo das curvas γ no espaço de medida (P, μ) a partir de sua estrutura de diferenciação associada, os espaços tangentes a γ, e por conseguinte obter uma forma de integração em P que se relacione com a estrutura das medidas em (P, μ), permitindo com isto a aplicação de ferramentas de cálculo variacional aos espaços de probabilidade.

Nota-se que existe uma relação significativa entre as características geométricas apresentadas pelo espaço de probabilidade e o espaço de medida associado, uma vez que é neste espaço associado que ocorre a determinação das estruturas de caráter geométrico de P, tais como curvas de interpolação, e portanto modificações no espaço de medidas associado produzem reflexos nas estruturas geométricas do espaço de probabilidade.

Desta forma, as ferramentas de Transporte Ótimo fornecem a capacidade de extrair a partir das propriedades geométricas dos espaços de probabilidade estruturas de caráter variacional associados a eles, por meio de estruturas de otimização de custo, no caso geodésicas, nos espaços de medida associados bem como permitem a definição de uma estrutura para a aplicação da operação de integração sobre o espaço (P, μ).

CONCLUSÕES:

A pesquisa foi capaz de alcançar o objetivo proposto ao usar ferramentas de Transporte Ótimo para encontrar estruturas de caráter geométrico em espaços de probabilidade, tais como geodésicas e espaços tangentes.

Percebeu-se que os espaços de medida de probabilidade podem induzir estruturas de diferenciação e integração nos espaços de probabilidade aos quais estão associados e que estas estruturas podem ser estudadas a partir das propriedades geométricas destes espaços associados, fazendo assim o estudo destas propriedades ser uma forma de aplicar aos espaços de probabilidade as ferramentas do cálculo variacional e integral a partir de estruturas naturais desses espaços.

Com estas considerações e os resultados obtidos, observa-se que as propriedades geométricas dos espaços de probabilidade permitem relacionar aspectos da Teoria de Transporte Ótimo, Cálculo Variacional, Integração e Teoria da Medida de forma sistemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARTLE, Robert G.,*The Elements of Integration and Lesbegue Measure*, ed.2, Wiley Classic Library, 1996.

[2] VILLANI, Cédric, *Optimal Transport Old and New*, ed.2, Springer, 2010.

[3] SEAN, Moss; PERRONE, Paolo, *Category-theoretical proof of ergodic decomposition theorem*. Revista: Ergodic Theory and Dynamical Systems, 15/02/2023