



A MECÂNICA QUÂNTICA PRECISA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Palavras-Chave: Números complexos, Correlações quânticas, Não-localidade de Bell

Autores:

Leonardo Pereira Stabile (IFGW)

Prof. Dr. Marcelo de Oliveira Terra Cunha (IMECC)

1 Introdução

O advento da mecânica quântica promoveu uma grande transformação na visão dos físicos sobre a natureza. Tornou-se necessário abandonar a concepção clássica e adotar novos axiomas que surgiram com o objetivo de solucionar os problemas que a atual não era capaz, como a catástrofe ultravioleta, o efeito foto-elétrico, etc. Logo no primeiro axioma, nota-se que as previsões mais simples da teoria se dão por meio de operações em um vetor $|\psi\rangle$. Com ele, podemos avaliar a posição, o momento e outras quantidades físicas que são importantes no dia a dia do pesquisador. No entanto, diferentemente da física clássica, os números complexos parecem ser essenciais para sua descrição.

Nos cursos habituais de mecânica quântica do ensino superior, adota-se sem nenhum questionamento a presença dos números complexos. Existe um vetor $|\psi\rangle$ pertencente a um espaço de estados complexo, cujos coeficientes, nomeados *amplitudes de probabilidade*, representam números complexos. Além disso, a equação de Schroedinger, que descreve a dinâmica do sistema quântico em questão também é uma equação diferencial complexa.

Portanto, neste trabalho foram examinados diversos trabalhos científicos com o objetivo de reunir e entender as necessidades desse corpo na teoria quântica.

2 Metodologia

Por se tratar de um trabalho teórico, a metodologia adotada para o projeto consistiu de estudos de trabalhos bibliográficos e artigos científicos sobre fundamentos da mecânica quântica, não-localidade de Bell, tomografia de estados quânticos, critérios de separabilidade, quantificadores de emaranhamento, números complexos e álgebra linear.

A investigação bibliográfica foi dividida em três partes. Na primeira, foram estudados tópicos relacionados a obtenção do estado quântico experimentalmente, conhecida como *tomografia*. Na segunda etapa, foram estudados as semelhanças e diferenças fundamentais entre teoria quântica real e complexa do ponto de vista do emaranhamento. Enquanto na etapa final, uma proposta de experimento também foi estudada. Nela, é possível diferenciar as duas teorias através de um experimento de Bell.

Após uma extensa pesquisa bibliográfica, o aluno se propôs a escrever uma monografia, construindo uma argumentação lógica baseada nos trabalhos analisados, de modo que fosse possível entender o que cerca a seguinte questão fundamental do trabalho: “A mecânica quântica precisa dos números complexos?”.

3 Resultados e discussões

Seguindo a ordem lógica dos temas do projeto final, podemos começar a discutir os resultados através da seguinte reflexão: Suponha que colecionamos, através de um experimento físico, um conjunto de valores médios medidos em um sistema quântico em estudo. Como é possível reconstruir o estado físico que representa esse sistema? Além disso, qual é a quantidade mínima de dados necessários para determiná-lo? Para sistemas de dimensão 2, os qubits, Band e Park[2] mostram que três observáveis que não comutam são necessários para determinar o operador estatístico ρ de um sistema quântico. Esse resultado pode ser entendido da seguinte maneira. Em um espaço vetorial complexo de dimensão 2, precisamos de 4 números reais para descrever um operador agindo nesse espaço com relação a alguma base. No entanto, por se tratar de observáveis com interpretação física, requeremos que o traço dos operadores que representam estados físicos seja unitário, uma normalização nas probabilidades. Desta forma, precisamos de $4 - 1 = 3$ números reais para determiná-lo. Esses três números são interpretados como valores médios, obtidos experimentalmente através de uma preparação.

Portanto, se temos um cenário experimental cujos conjuntos de dados são valores médios de operadores quânticos conhecidos, comumente apelidados de *quorum*, $\langle A \rangle$, Band e Park mostram que o estado quântico pode ser expresso como

$$\vec{\rho} = \frac{\delta E(\vec{A} \times \vec{B}) + \delta A(\vec{B} \times \vec{E}) + \delta B(\vec{E} \times \vec{A})}{2\vec{E} \cdot \vec{A} \times \vec{B}}, \quad (1)$$

onde E , A e B são os observáveis hermitianos medidos experimentalmente, $\delta E = \langle E \rangle - E_0$ e \vec{E} é o vetor de E quando decomposto na base das matrizes de Pauli,

$$E = E_0\sigma_0 + \vec{E} \cdot \vec{\sigma}. \quad (2)$$

Esse resultado também pode ser estendido para dimensões maiores, como em [3, 9].

Após entender como funciona a determinação do estado quântico em questão, um dos problemas interessantes(grande parte em aberto) do estudo dos fundamentos de mecânica quântica é entender quais estados são emaranhados e, deles, como podemos quantificar tal emaranhamento. Estudando esses temas, podemos entender que diferentes corpos de números vão implicar em diferentes conclusões sobre o emaranhamento.

Como muito bem explicado em [5], o emaranhamento em sistemas quânticos complexos funciona de forma diferente dos sistemas reais. Essa é uma consequência direta do fato de que os observáveis precisam ser Hermitianos, $H^\dagger = H$, a base que constitui o espaço de estados de cada subsistema consiste em uma associação de operadores simétricos \mathcal{S} e anti simétricos \mathcal{A} , $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus i\mathcal{A}$. Dessa forma, se temos dois sistemas A e B, o espaço que representa o conjunto AB pode ser decomposto em somas diretas de componentes simétricas e anti simétricas:

$$\mathcal{H} = \underbrace{((S_A \otimes S_B) \oplus (\mathcal{A}_A \otimes \mathcal{A}_B))}_{\text{Simétrico, } \mathcal{S}_{AB}} \oplus i \underbrace{((S_A \otimes \mathcal{A}_B) \oplus (\mathcal{A}_A \otimes S_B))}_{\text{Anti simétrico, } \mathcal{A}_{AB}} \quad (3)$$

Em teoria quântica complexa, um estado quântico separável $|\psi\rangle_{AB}$ pode ter componentes em quaisquer decomposição desse espaço de Hilbert composto sem nenhum problema, pois suas partes também podem ter componentes no espaço de Hilbert reduzido sem nenhuma restrição.

No entanto, quando mudamos o corpo de números para real, o estado quântico reduzido que compõe o estado separável não pode ter componentes em \mathcal{A}_A (ou \mathcal{A}_B , se estivermos falando da outra parte), pois o espaço de Hilbert real não é gerado por matrizes anti simétricas! Portanto, se o estado conjunto $|\psi\rangle_{AB}$ possuir qualquer componente em \mathcal{A}_{AB} , não existe forma de reescrevê-lo como um estado separável, podendo concluir que este é emaranhado!

No trabalho [5], os autores mostram que o emaranhamento de formação $E(\rho)$, uma quantidade utilizada para quantificar emaranhamento em estados quânticos através de uma mistura estatística, pode ser escrita

em função da *concorrência*, $C(\rho)$ e que, em estados reais, existe um critério de separabilidade. Se ρ^{AB} é um estado quântico real separável, ele não pode ter componente em $\sigma_2 \otimes \sigma_2$, pois a segunda matriz de Pauli gera o espaço vetorial assimétrico das partes! Desta forma, precisamos que sua projeção no estado seja nula

$$\text{Tr}(\rho^{AB} \sigma_2 \otimes \sigma_2) = 0. \quad (4)$$

Caso contrário, o estado é necessariamente emaranhado com relação aos reais. Note que essa condição não é geral em mecânica quântica, visto que ela não existe em teoria quântica complexa.

No entanto, até aqui, apresentamos argumentos que se concentram no âmbito matemático da teoria. O artigo que motivou esse projeto foi publicado no início de 2022, e ele representa uma grande mudança nesses estudos. Com uma proposta experimental, Renou et al [10] sugeriram um experimento de *Entanglement Swapping*[4], esquematizado na figura 1. Nele, vamos considerar que temos uma fonte de estados quânticos maximamente emaranhados na base de Bell, que é composta pelos vetores

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle). \quad (5)$$

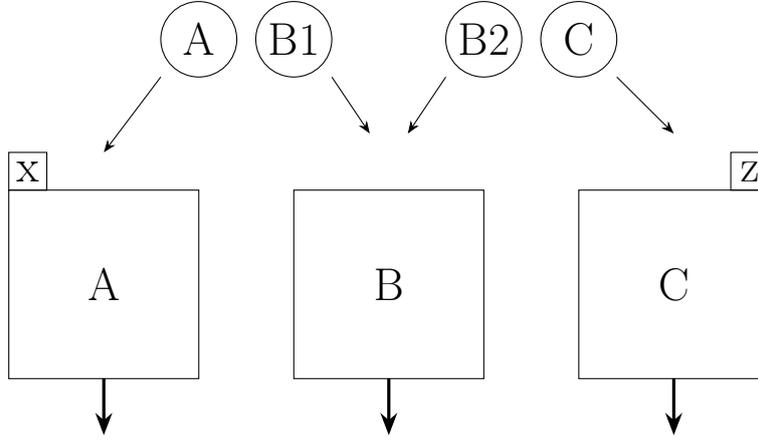


Figura 1: Esquema de Entanglement Swapping. Aqui, os dois círculos próximos representam um estado conjunto de dois sistemas. As caixas X e Z representam os inputs, $x \in \{1, 2, 3\}$, enquanto $z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A seta inferior indica que o observador em questão emite como resposta ± 1 para A e C , e $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ para B .

Da primeira fonte, que gera o estado ρ_{AB1} , vamos distribuir o subsistema A para o observador A (carinhosamente apelidada de Alice) e o subsistema $B1$ para o observador B (Bob). Da segunda fonte, gerando ρ_{B2C} , o subsistema $B2$ será entregue para B e o subsistema C será dado para o observador C (Charlie). Alice pode realizar três tipos de medições locais na base das matrizes de Pauli, σ_i , cuja decisão de qual medir é tomada por um input gerado aleatoriamente. Enquanto Charlie pode medir 6 combinações diferentes das matrizes de Pauli, representando direções ortogonais em a graus com relação as de Alice, $\frac{\sigma_i \pm \sigma_j}{\sqrt{2}}$, um cenário estudado por [1] em 2016. Bob realizará medições conjuntas na base de Bell nas duas partes, tendo quatro possíveis saídas. Esse processo gera uma troca de emaranhamento entre os quatro subsistemas. A medição projetiva de Bob emaranha $B1$ e $B2$, fazendo com que os qubits de Alice e Charlie se emaranhem por consequência. Como resultado dessas medições, a probabilidade de obter a saída a de Alice dado o input x , b de Bob e c de Charlie dado o input z é

$$P(abc|xz) = \sum_{\lambda} P(\lambda) \text{Tr}(\rho^{AB1} \otimes \rho^{B2C} \{A_{a|x} \otimes B_b \otimes C_{c|z}\}), \quad (6)$$

onde λ é uma variável que pode conter aleatoriedades intrínsecas das fontes que geram os sistemas e $P(\lambda)$ é uma distribuição de probabilidades que caracteriza tal variável.

O conjunto dessas probabilidades define as correlações quânticas do experimento e, com elas, podemos calcular valores esperados e derivar *desigualdades de Bell*. A desigualdade de Bell derivada pelos autores é

composta por três desigualdades de Bell simples, conhecidas como CHSH. Esse cenário pode ser utilizado para descrever experimentos entre duas partes, onde cada uma recebe um input x, y e fornece um output a, b . Se definirmos a quantidade $E_{x,y} = \sum_{a,b} abp(a, b|x, y)$, a desigualdade CHSH pode ser definida como

$$CHSH(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = E_{\alpha, \gamma} + E_{\alpha, \delta} + E_{\beta, \gamma} - E_{\beta, \delta} \leq \beta, \quad (7)$$

onde β é denominada *cota*. Quanticamente, essa cota foi calculada primeiramente por Tsirelson[7] e tem o valor de $2\sqrt{2}$. Composto as três CHSH para o cenário de Entanglement Swapping, temos

$$\mathcal{I} \equiv CHSH(1, 2; 1, 2) + CHSH(1, 3; 3, 4) + CHSH(2, 3; 5, 6) \leq 6\sqrt{2} \quad (8)$$

Note que, para calcular \mathcal{I} , precisamos avaliar as probabilidades de medições realizadas por dois observadores (Alice e Charlie), de modo que para cada b , existe um valor da desigualdade \mathcal{I}_b . No entanto, como usamos estados maximamente emaranhados e uma medida projetiva na base de Bell em Bob, a probabilidade de obter cada saída é $1/4$, de modo que $\mathcal{I}_b = \frac{6}{4}\sqrt{2}$. Somando cada saída, temos a cota escrita em 8.

A parte interessante acontece quando calculamos tais probabilidades usando teoria quântica real e complexa. Em teoria quântica complexa, a cota máxima é $6\sqrt{2}$, representando a soma das cotas máximas de cada CHSH individualmente. No entanto, em teoria quântica real, a cota máxima é de ≈ 7.66 [10]. Essa conclusão pode ser entendida quando vemos que as propriedades de que o emaranhamento acontece de forma diferente nos dois espaços, como discutido anteriormente, de modo que as probabilidades reais não podem ser escritas como 8 de maneira geral. Para distribuições em que isso é possível, a cota máxima da desigualdade é menor, permitindo uma diferença entre as duas teorias. A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada no apêndice F em [10] e foi estudada no capítulo 4 da monografia escrita no projeto.

Teorema 1 (Proposição 1 [10]) *O conjunto de probabilidades P não pode ser escrito na forma 8 quando estamos tratando de teoria quântica real.*

Até o momento, dois experimentos foram capaz de violar tal cota, [6] e [8], com algumas mudanças na desigualdade de Bell, o que é esperado pela natureza do experimento.

Ou seja, diferentemente da teoria clássica, onde os números complexos são meras conveniências matemáticas utilizadas para facilitar os cálculos, e que nenhum experimento pode comprovar uma diferença entre utilizar ou não tal corpo, a mecânica quântica prova resultados diferentes. O resultado importante obtido por [10] vem do fato de ser possível distingui-las experimentalmente, ou seja, é um comportamento natural.

4 Conclusões

Por fim, a conclusão principal deste projeto é que a pergunta “qual é a necessidade dos números complexos na teoria quântica” possui uma rica discussão a ser estudada. Por mais que o resultado de [10] seja simples, os fundamentos que os levaram a derivar tal resultado são detalhistas e foram baseados em trabalhos anteriores de diversos outros pesquisadores.

Dessa maneira, concluímos que existem diferenças fundamentais entre os estados quânticos reais com relação aos complexos, principalmente na definição de emaranhamento. Devido a essas diferenças, um experimento de Bell é capaz de mostrar que estados quânticos reais não conseguem reproduzir uma distribuição de probabilidades desejada, comprovada experimentalmente.

Referências

- [1] A. Acín, S. Pironio, T. Vértesi, and P. Wittek. Optimal randomness certification from one entangled bit. *Phys. Rev. A*, 93:040102, Apr 2016.

- [2] W. Band and J. L. Park. The empirical determination of quantum states. *Found Phys*, (1):133–144, 1970.
- [3] W. Band and J. L. Park. A general method of empirical state determination in quantum physics: Part ii. *Foundations of Physics*, 1:339–357, 1971.
- [4] C. Branciard, N. Gisin, and S. Pironio. Characterizing the nonlocal correlations created via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 104:170401, Apr 2010.
- [5] C. M. Caves, C. A. Fuchs, and P. Rungta. Entanglement of formation of an arbitrary state of two rebits. *Found. Phys. Lett.*, 14:199–212, 2001.
- [6] M.-C. Chen, C. Wang, F.-M. Liu, J.-W. Wang, C. Ying, Z.-X. Shang, Y. Wu, M. Gong, H. Deng, F.-T. Liang, Q. Zhang, C.-Z. Peng, X. Zhu, A. Cabello, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan. Ruling out real-valued standard formalism of quantum theory. *Physical Review Letters*, 128(4), Jan 2022.
- [7] B. S. Cirel’son. Quantum generalizations of bell’s inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4(2):93–100, 1980.
- [8] Z.-D. Li, Y.-L. Mao, M. Weilenmann, A. Tavakoli, H. Chen, L. Feng, S.-J. Yang, M.-O. Renou, D. Trillo, T. P. Le, N. Gisin, A. Acín, M. Navascués, Z. Wang, and J. Fan. Testing real quantum theory in an optical quantum network. *Physical Review Letters*, 128(4), Jan 2022.
- [9] J. L. Park and W. Band. A general theory of empirical state determination in quantum physics: Part i - foundations of physics. *Foundations of Physics*, 1:211–226, 1971.
- [10] M.-O. Renou, D. Trillo, M. Weilenmann, T. P. Le, A. Tavakoli, N. Gisin, A. Acín, and M. Navascués. Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified. *Nature*, 600(7890):625–629, Dec 2021.