TEORIA DE SEMIGRUPOS E APLICAÇÃO A UM SISTEMA ELÁSTICO

Aluno: Eduardo Moraes Ferrari
Orientadora: Prof(a). Dr(a). Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

UNICAMP

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é encontrar solução de um sistema elástico por meio da teoria de semigrupos. Para isso, foram realizados estudos de tópicos introdutórios de teoria da medida e de teoria de integração, espaços L^p, espaços de Sobolev e espaços dependentes do tempo, assim como teoremas de imersões contínuas e imersões compactas. Em seguida foi estudada a teoria de semigrupos, com enfoque nos teoremas de Hille-Yosida, Lummer-Phillips e Gearhart. Por fim foram trabalhadas, por meio da teoria de semigrupos, a existência e a unicidade dos problemas de valor inicial e de contorno envolvendo a equação do calor, a equação da onda e o sistema elástico dado por (1).

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u + \alpha u_t = f & (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1, & x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

em que c é a velocidade de propagação da onda, $\alpha > 0$ é a constante de amortecimento e f é uma força externa.

ESTUDOS PRELIMINARES

TEORIA DA MEDIDA

Inicialmente foram estudados os conceitos de σ-álgebra, espaços de medida e funções mensuráveis. Em seguida foi estudada teoria de integração e algumas propriedades da integral, destacam-se os Teoremas da Convergência Monótona e da Convergência Dominada de Lebesgue apresentados abaixo.

Teorema 1 ***(Teorema da Convergência Monótona)*** *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções a valores reais positivos que converge para f, então*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Teorema 2 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge quase todo ponto para uma função a valores reais mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Durante esta parte dos estudos preliminares destaca-se também o estudo dos espaços L^p, cuja definição é dada abaixo.

Definição 3 *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p = L^p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ consiste em todas as (classes de equivalência de) funções mensuráveis a valores reais f tais que $|f|^p$ tem integral finita com respeito à medida μ em X. É definida a norma*

$$||f||_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

para $1 \leq p < \infty$.

Tem-se como resultado que para $1 \leq p < \infty$, o espaço de Lebesgue L^p é um espaço linear normado e é completo sob a norma acima, logo o espaço L_p é um espaço de Banach.

Definição 4 *O espaço $L^\infty = L^\infty(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ consiste em todas as (classes de equivalência de) funções mensuráveis a valores reais f que são limitadas em quase todo ponto. Se $f \in L^\infty$, define-se*

$$S(N) = sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

e

$$||f||_\infty = inf\{S(N) : N \in \boldsymbol{X}, \mu(N) = 0\}.$$

Também tem-se como resultado que L^∞ é um espaço de Banach dada a norma acima.

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Para que se possa trabalhar com equações diferenciais parciais, é importante ter noção a respeito dos espaços de Sobolev, pois as soluções obtidas pertencem naturalmente a esses espaços. No contexto deste projeto, trabalha-se com soluções fracas. Ao longo do trabalho são utilizadas derivadas fracas.

Definição 5 *Suponha $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α um multi índice. É dito que v é derivada parcial fraca de grau α de u, sendo escrito $D^\alpha u = v$, dado que*

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi$$

para todas as funções teste $\phi \in C_c^\infty(U)$.

A derivada parcial fraca de ordem α, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula. Além disso, a derivada fraca possui as mesma propriedade básicas da derivada convencional. Com a definição de derivada fraca bem estabelecida, é possível definir e trabalhar com os espaços de Sobolev.

Definição 6 *O espaço de Sobolev denotado por $W^{k,p}(U)$, em que $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, consiste em todas funções localmente integráveis $u : U \to \mathbb{R}$ tais que para cada multi índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$.*

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ é um espaço de Banach munido da norma de Sobolev $|| \cdot ||_{W^{k,p}(U)}$.

$$||u||_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Em seguida foi visto que é possível aproximar funções de Sobolev por funções suaves, ou seja, funções suaves são densas em espaços de Sobolev quando munidas da norma acima.

Outro fator muito importante dentro do estudo dos espaços de Sobolev são resultados a respeito de imersões de Sobolev em outros espaços. Ressaltam-se o Teorema geral das desigualdades de Sobolev e o Teorema da compacidade de Rellich-Kondrachov dados a seguir.

Teorema 7 ***(Teorema geral das desigualdades de Sobolev)*** *Seja U um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(U)$, então*

(i) Se $k < \frac{n}{p}$, então $u \in L^q(U)$, em que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Além disso, $||u||_{L^q(U)} \leq C||u||_{W^{k,p}(U)}$, em que a constante C depende apenas de k, p, n e U;

(ii) Se $k > \frac{n}{p}$, então $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$, em que

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é inteiro,} \\ \text{qualquer positivo} < 1, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ é inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, vale a desigualdade $||u||_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C||u||_{W^{k,p}(U)}$, em que a constante C depende apenas de k, n, p, γ e U.

Teorema 8 ***(Teorema da Compacidade de Rellich-Kondrachov)*** *Suponha que U é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial U \in C^1$. Suponha ainda $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(U)$ está compactamente imerso em $L^q(U)$ para cada $1 \leq q < p^*$, em que $p^* = \frac{pn}{n-p}$.*

TEORIA DE SEMIGRUPOS

Inicialmente é necessário definir semigrupo de operador e gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Definição 9 *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X, $S(t) : X \to X$ tais que:*
(i) $S(0) = I$, em que I é o operador identidade de x,
(ii) $S(t+s) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$;
Diz-se que a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares de X em X é um semigrupo se satisfaz as condições acima.

Definição 10 *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito de classe C_0, ou C_0-semigrupo, se para todo $u \in X$*

$$lim_{t\to 0^+} ||(S(t)u - u)|| = 0.$$

Definição 11 *Seja um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Denote por*

$$D(A) = \left\{ u \in X : lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e defina

$$A : D(A) \subset X \to X$$
$$u \to Au.$$

Neste caso, A é o gerador infinitesimal do do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A. Denotamos $\{S(t)\}_{t\geq 0} = e^{At}$.

Para que seja possível utilizar a teoria de semigrupos para o estudo de sistemas de equações diferenciais são fundamentais os Teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips. Contudo, antes de enunciá-los veja algumas propriedades a respeito de semigrupos.

Propriedades. Seja A um gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Então,

1. $D(A)$ é um subespaço vetorial denso em X.
2. A é um operador fechado.
3. $S(t)u \in D(A)$ para todo $u \in D(A)$ e $t > 0$.
4. $AS(t)u = S(t)Au$ para todo $u \in D(A)$ e $t > 0$.
5. O operador $t \to S(t)u$ é diferenciável para cada $t > 0$.
6. $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ para cada $t > 0$.
7. Para cada $u \in D(A)$, tem-se que $S(t)u \in C^0([0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$.
8. Se $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ são C_0-semigrupos que possuem o mesmo gerador infinitesimal A, então $S_1(t) = S_2(t)$ para todo $t > 0$.

Teorema 12 ***(Teorema de Hille-Yosida)*** *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear no espaço de Banach X. Então, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, se, e somente se, satisfaz*

- *A é fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = X$.*
- *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $||R_\lambda|| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall\ \lambda > 0$.*

Teorema 13 ***(Teorema de Lummer-Phillips)***

- *Seja A dissipativo e λ_0 tal que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.*
- *Se A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, então A é dissipativo e para todo $\lambda > 0$, tem-se que $Im(\lambda I - A) = X$.*

Assim, a partir dos teoremas expostos acima é possível obter a existência de solução de alguns sistemas de equações diferenciais parciais e, a partir da Propriedade 8 listada acima, obtem-se a unicidade de solução. O grande desafio da teoria de semigrupos é no encontro do gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao sistema em que a solução, onde u_0 é a condição inicial, será dada por

$$u = S(t)u_0. \tag{2}$$

EQUAÇÕES DO CALOR E DA ONDA

Abaixo encontra-se o sistema da equação do calor e a solução obtida utilizando semigrupos.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & em\ Q = U \times (0, T] \\ u = 0 & em\ \Sigma \\ u = u_0 & em\ U \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

com $u_0 \in D(A)$, e neste caso $X = L^2(U)$, $D(A) = H_0^1(U) \cap H^2(U)$ e $A = \Delta$. Ao mostrar que $A = \Delta$ é o gerador infinitesinal de um C_0-semigrupo de contrações em X tem-se diretamente que a solução é dada por (2), pela propriedade 8 a solução é única e pela propriedade 7 tem-se

$$u \in C^0([0,\infty); H^2(U) \cap H_0^1(U)) \cap C^1([0,\infty); L^2(U)).$$

Abaixo está dado o sistema da equação da onda e a solução encontrada por meio de semigrupos.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & em\ Q = \Omega \times (0,T] \\ u = 0 & em\ \Sigma \\ u = u_0 \ \ u_t - u_1 & em\ \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

com $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Neste caso, é possível reescrever o sistema como

$$\begin{cases} U_t - AU = 0 & em\ Q = \Omega \times (0,T] \\ U(0) = U_0 & em\ \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

e também $X = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, com $D(A) = [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$. Ao mostrar que A dado acima é gerador infinitesinal de um C_0-semigrupo de contrações, a unicidade é dada pela propriedade 8 e a solução é dada por

$$U = S(t)U_0.$$

E pela propriedade 7,

$$u \in C^0([0,\infty); (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(U)).$$

SISTEMA ELÁSTICO

No momento da entrega deste resumo, a resolução do sistema elástico dado abaixo, assim como o estudo de decaimento de energia por meio do Teorema de Gearhart estão para ser feitos e, assim, encerrando o projeto

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + \alpha u_t = f \qquad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty),$$

com condições iniciais e de contorno

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1, & x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in [0,\infty). \end{cases}$$

em que c é a velocidade de propagação da onda, $\alpha > 0$ é a constante de amortecimento e f é uma força externa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bartle, R.G, The elements of integration. John Wiley, New York, NY, 1996.

[2] Cunha, C.A.R. da, Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP. Notas de Matemática Aplicada, v.32, SBMAC 2007, Florianópolis, 2007.

[3] Evans, Lawrence C. Partial Differencial Equations. 2. ed. [S. l.]: American Mathematical Society, 2010.

[4] Munoz-Royden, J.E., Estabilização de Semigrupos e Aplicações, 3a edição. Laboratório Nacional de Computaçãoo Científica, Petrópolis, Universidade Federal de Rio de Janeiro Rio de Janeiro, 2008