XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

Formas Diferenciais e Geometria de Superfícies

Palavras-Chave: geometria de superfícies; método do referencial móvel; formas diferenciais

Autores:
Luiz Carazolli - IMECC - Unicamp
Prof. Dr. Lino Grama - IMECC - Unicamp

Introdução

A Geometria Diferencial é uma das áreas básicas da Matemática, tendo várias relações com outras áreas e sendo bastante aplicável em outras ciências. O presente projeto consiste numa introdução ao estudo da geometria de superfícies, por meio do *método do referencial móvel (repère mobile)*, abordagem desenvolvida por Élie Cartan. Esse estudo foi dividido no período de dois semestres:

No primeiro semestre foram estudados os pré-requisitos para a compreensão dessa teoria, como álgebra multilinear, fundamentos de variedades diferenciáveis, formas diferenciais e integração de formas. O principal resultado desse período foi o contato com os conceitos principais, sumarizados pelo Teorema de Stokes (na sua versão geral, para formas diferenciais).

Já no segundo semestre, foi realizado um estudo sobre geometria de superfícies por meio do Método do Referencial Móvel. Iniciando por uma descrição do método em questão, foi possível caracterizar intrinsecamente a geometria de superfícies, por meio da construção de conceitos importantes (formas de conexão, curvatura gaussiana, 1a e 2a formas fundamentais, derivada covariante, curvatura geodésica, entre outros), bem como demonstrar resultados importantes a esse respeito (Teorema de Levi-Civita, "Teorema Egrégio", entre outros). Tendo isso em mãos, finalmente pode-se atingir o objetivo final desse estudo: a demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet.

Metodologia

A metodologia desse projeto consistiu no estudo do conteúdo por meio das referências citadas ao final deste documento, alinhado a reuniões semanais com o orientador, a fim de apresentar o avanço dos estudos, resolver dúvidas e discutir exemplos referentes aos assuntos estudados.

Discussão

O resumo será dividido em duas partes, correspondendo respectivamente aos estudos do primeiro e segundo semestres. Serão brevemente descritas as definições necessárias e serão listados os resultados principais de cada parte, seguindo o cronograma do que foi estudado. Vale ressaltar que uma descrição detalhada do estudo pode ser encontrada nos relatórios parcial e final de atividades.

Primeira parte

Definição 1 (Variedade diferenciável)**.** Seja M um conjunto, e considere uma família de aplicações injetivas $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, onde cada U_α é aberto. Uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ tal que $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$ é chamada de *atlas* (ou sistema de coordenadas, parametrização) para a variedade M. Quando, para todo α e β, as seguintes condições são satisfeitas, dizemos que a família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é uma *estrutura diferenciável sobre* M:

1. os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$
2. as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ são diferenciáveis
3. a família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é maximal com relação as propriedades acima, isto é, não admite mais nenhuma dupla (U, f) com estas propriedades

Nesse contexto,uma **variedade diferenciável** n-dimensional é um conjunto M munido de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, onde $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$

Ademais, diremos que M é **orientável** quando para alguma parametrização a derivada da mudança de coordenadas $d(f_\alpha^{-1} \circ f_\beta)$ tiver determinante positivo. Caso contrário, M é dita *não-orientável*

Definição 2 (Espaço tangente)**.** Seja M uma variedade diferenciável, U um aberto que contém $p \in M$ e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere $\alpha : I \longrightarrow U$ uma curva diferenciável, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Definimos que o vetor tangente (p, v) age em φ da seguinte forma (*derivada direcional* de φ no ponto p, na direção v):

$$(p, v)(\varphi) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Pode-se demonstrar facilmente que a definição acima independe da escolha de α, nos levando ao fato de que um vetor tangente a $p \in M$ é uma combinação linear de $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$. Reciprocamente, podemos também demonstrar que um vetor gerado pelo conjunto anterior será tangente a M em p. Definimos então o **espaço tangente** a M no ponto p, T_pM, como o espaço vetorial cuja base é $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$

Bem exploradas as definições acima, e tendo visto variados exemplos e resultados da teoria, pôde-se introduzir o conceito de **formas diferenciais**

Definição 3 (Formas)**.** Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma **k-forma** é um mapa que associa a cada ponto p da variedade uma forma k-linear alternada $\omega(p)$ em T_pM, *i.e.*, $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM^*)$). Quando para toda parametrização local f_α tivermos que $f_\alpha^*\omega$

Em $\mathbb{R}^n$, toda k-forma ω pode ser escrita (unicamente) como $\omega = \sum_J a_J \, dx_J$, onde $a_J : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Assim, ω é dita uma k-forma diferencial se os coeficientes a_J forem funções diferenciáveis. Ademais, se ω for uma k-forma em M e os coeficientes de $f_\alpha^* \omega$ forem funções diferenciáveis (para toda parametrização local f_α) diremos que ω é uma **k-forma diferencial** em M. Com esse conceito, podem ser definidas várias propriedades e operações, como o produto exterior e a derivada exterior.

Chegando ao final da primeira parte, o estudo se voltou para a teoria de integração de formas diferenciais em variedades diferenciáveis. Em primeiro lugar, caso ω seja uma n-forma de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Temos que $\omega = a \, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, para a uma função diferenciável $a : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, e definimos a integral de ω como

$$\int_U \omega = \int_U a \, dx_1 ... dx_k$$

Assim, é possível expandir essa definição para formas fora do espaço euclidiano da seguinte maneira:

Definição 4 (Integral de uma n-forma)**.** Seja M uma variedade diferenciável de grau k e ω uma k-forma de suporte compacto em M. Aqui há duas possibilidades:

- Caso o suporte de ω esteja contido em uma vizinhança coordenada, *i.e.* $\mathrm{supp}(\omega) \subset f_\alpha(U_\alpha)$, a integral de ω é definida por
$$\int_M \omega = \int_{U_\alpha} f_\alpha^* \omega$$
onde $f_\alpha^* \omega$ denota o *pull-back* de ω por f_α

- Caso contrário, considere ρ_i uma *partição da unidade* subordinada a parametrização de M. Define-se então a integral de ω como
$$\int_M \omega = \sum_i \int \rho_i \omega$$

Vários teoremas e resultados interessantes foram estudados nesse ponto, como o lema de Poincaré (formas fechadas são exatas em um domínio simplesmente conexo), a existência de partições da unidade, entre outras proposições também relevantes. O principal resultado estudado nesse período, que sumariza bem as definições e resultados "preliminares", pôde ser então enunciado e demonstrado

Teorema 1 (Stokes)**.** Seja M uma variedade k-dimensional com bordo, orientável e compacta. Se ω é uma $(k-1)$-forma diferencial em M, então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

onde $d\omega$ denota a derivada exterior de ω e ∂M o bordo de M

Segunda parte

O estudo da teoria mostrada a seguir foi feito de maneira construtiva, primeiro tomando $\mathbb{R}^n$ como ambiente, depois superfícies imersas em $\mathbb{R}^n$, e, finalmente, variedades riemannianas

Definição 5 (Referencial e co-referencial móvel)**.** Um **referencial móvel ortonormal** (em $\mathbb{R}^n$) é um conjunto de campos vetoriais $\{e_1, ..., e_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Associado a esse referencial, dizemos que as 1-formas θ_1, θ_2, com a condição $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, formam o **co-referencial associado**.

Um dos objetivos da aplicação dessa teoria ao estudo da geometria de superfícies (analogamente, ao estudo da geometria de variedades riemannianas bidimensionais) é a obtenção de grandezas geométricas que independam do referencial móvel escolhido. Para o estudo de superfícies, esse estudo é feito pela *aplicação normal de Gauss*. Diremos que um referencial móvel (em $\mathbb{R}^3$) é *adaptado* à uma superfície M quando $e_1(p), e_2(p) \in T_pM$, em todo $p \in M$. Consequentemente, quando $\{e_1, e_2, e_3\}$ é adaptado a M, temos que e_3 é sempre normal a M

Definição 6 (Curvatura gaussiana e curvatura média)**.** Seja M uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e $e_3 : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação normal de Gauss. Sendo $(de_3)_p : T_pM \longrightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, a curvatura gaussiana de M é dada pelo determinante da diferencial da aplicação N, e a curvatura média pelo seu traço

Definição 7 (Primeira e segunda formas fundamentais)**.** Dada uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, há duas formas quadráticas associadas que descrevem sua geometria

- **Primeira forma fundamental**: $I_p(v, v) = \langle v, v \rangle_p$. Em termos de um referencial adaptado, $I = \theta_1^2 + \theta_2^2$
- **Segunda forma fundamental**: $II_p(v) = -\langle (de_3(v), v) \rangle_p$,

Assim, pôde-se caracterizar a geometria de superfícies e compreender um dos teoremas fundamentais desse campo:

Teorema 2 (Egrégio)**.** A curvatura gaussiana de uma superfície M é uma grandeza intrínseca a M, *i.e.*, depende apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental

Seguindo para o estudo da geometria de variedades riemannianas bidimensionais (agora não necessariamente imersas em $\mathbb{R}^3$), fazendo algumas adaptações nas definições, é possível também obter grandezas que caracterizam a geometria desses objetos.

Teorema 3 (Levi-Civita - 1° equação de estrutura)**.** Sendo $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel ortonormal em M^2 e θ_1, θ_2 seu co-referencial associado, então existe uma única 1-forma (forma de conexão) $\omega_{12} = -\omega_{21}$ em M com
$$d\theta_i = \omega_{ij} \wedge \theta_j$$

Os as grandezas citadas anteriormente são as que seguem nos resultados a seguir

Proposição 4 (Curvatura gaussiana - 2° equação de estrutura)**.** Existe uma função $K : M \to \mathbb{R}$ tal que para todo referencial móvel (ortonormal) $\{e_1, e_2\}$ temos

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$$

O número $K(p)$ é denominado *curvatura gaussiana de M em $p \in M$*

Proposição 5. Sejam Y, V campos vetoriais diferenciáveis em M^2, $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel ortonormal e ω_{12} sua 1-forma de conexão. Escrevendo $Y = y_1e_1 + y_2e_2$, e sendo a derivada covariante de Y com relação a V ($\nabla_V Y$) o operador

$$\sum_{i=1,2} \left(V(y_i) + \sum_{j=1,2} y_j \omega_{ji}(V) \right) e_i$$

temos que $\nabla_V Y$ independe do referencial móvel

Após caracterizar a geometria de variedades riemannianas, finalmente foi possível compreender tanto o enunciado quanto a demonstração do teorema principal do estudo (para variedades compactas): o teorema de Gauss-Bonnet. Primeiro foi vista uma versão local do teorema, e depois esta foi estendida globalmente (se apoiando na condição adicional de orientabilidade).

Teorema 6 (Gauss-Bonnet para 2-segmentos)**.** Considere M uma variedade riemanniana bidimensional e compacta. Sejam X um 2-segmento em M, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_4$ os seus ângulos externos, então

$$\int_X K dM + \int_{\partial X} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{4} \varepsilon_j = 2\pi$$

Teorema 7 (Gauss-Bonnet)**.** Para uma variedade riemanniana bidimensional M, compacta e orientável,

$$\int_M K dM + \int_{\partial M} \kappa_g ds = 2\pi\chi(M)$$

onde $\chi(M)$ denota a característica de Euler de M

Esse teorema final foi cuidadosamente estudado, posto que configura um resultado central da geometria diferencial

Conclusão

Este projeto de iniciação científica consistiu em uma introdução à geometria diferencial, por meio do estudo do método do referencial móvel. Para tal, foram estudados os pré-requisitos necessários, como formas diferenciais e variedades diferenciáveis, definindo os principais conceitos e demonstrando os principais resultados, resumidos pelo Teorema de Stokes. Em seguida, o método citado foi estudado de fato. A partir da definição de campos vetoriais adequados sobre superfícies (mais geralmente, variedades riemannianas bidimensionais), pôde-se caracterizar a geometria desses objetos. Dentre vários resultados demonstrados durante o estudo, destaca-se o Teorema Egrégio e o Teorema de Gauss-Bonnet. Como foi citado anteriormente, um resumo detalhado sobre todo o estudo realizado durante o projeto pode ser encontrado nos relatórios parcial e final de atividades.

Bibliografia principal

[1] Manfredo Perdigao do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicacoes.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[2] Shiing-Shen Chern. Moving frames. *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui - Lyon*, (Astérisque, no. S131 (1985)):67–77, 1984.

[3] Victor Guillemin and Peter J Haine. *Differential Forms.* World Scientific Publishing Company, 2019.

[4] Elon Lages Lima. *Curso de Analise vol. 2.* IMPA, 2012.

[5] James R Munkres. *Analysis on Manifolds.* Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[6] Barret O'neil. *Elementary Differential Geometry.* Elsevier Academic Press Publications, 2006.

[7] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. 2.* Publish or Perish, Inc, 1979.