



# QED e a correção do momento magnético anômalo do elétron

Marcelo Antonio Sakaguti Doria<sup>1</sup>, Profa. Dra. Arlene Cristina Aguilar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física Gleb Wataghin, UNICAMP

**Palavras-chave:** QED, Momento Magnético Anômalo, Correções Radiativas

## 1 Introdução

Neste trabalho vamos calcular a correção em 1-loop do momento magnético do elétron, também conhecido como fator  $a_e = g - 2$  do elétron. Além de nos fornecer a constante de proporcionalidade entre o momento magnético do elétron e seu momento angular, este fator também nos fornece indícios que o elétron é, de fato, uma partícula elementar, pois o seu  $g$  é um número “quase” inteiro. A título de comparação, no caso de partículas compostas, como o próton e o nêutron, o fator  $g$  é caracterizado por possuir grandes desvios de um números inteiros,  $g_p = 5.585$  e  $g_n = 3.826$ , respectivamente. Dentro do contexto da mecânica quântica relativística, o valor previsto pela equação de Dirac para momento magnético do elétron é  $g = 2$ . Entretanto dentro Eletrodinâmica Quântica (QED) é sabido que o momento magnético do elétron ganha uma pequena correção, devido aos efeitos puramente quânticos, que pode ser somente calculado dentro do formalismo da Teoria Quântica de Campos. Esta pequena correção recebeu o nome de momento magnético anômalo. Neste

trabalho vamos determinar analiticamente a contribuição em 1-loop para este fator, que corresponde a primeira e a maior correção, que ele adquire por correções quânticas. Ela pode ser calculada através da correção radiativa em 1-loop do vértice fóton-elétron da QED. Este cálculo foi feito pela primeira vez em 1948 por Julian Schwinger, e o valor que encontramos aqui é  $g - 2 = \alpha/2\pi \approx 0.0011614$ , onde  $\alpha = e^2/4\pi$  é a constante de estrutura fina.

## 2 Metodologia

O primeiro passo é analisar dentro do contexto da Mecânica Quântica qual é a predição que esta teoria nos fornece para o momento magnético do elétron. Para isso, vamos utilizar o limite não relativístico da equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético, que nos leva à chamada *equação de de Pauli*.

Sabemos que para acoplar o campo eletromagnético,  $A_\mu$ , na equação de Dirac, utilizamos a prescrição do acoplamento minimal,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ , onde  $e$  é a carga do elétron. Assim, na presença de um

campo eletromagnético a equação de Dirac se torna

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (1)$$

com  $m$  sendo a massa do elétron.

Com o intuito de estudarmos o limite não relativístico desta equação, ou seja, derivar a partir dela a equação de Schrödinger na presença de um campo magnético, podemos “tornar o quadrado” da Eq. (1), e chegar em

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu + m)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= 0 \\ (D_\mu D^\mu - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2)\psi &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

onde o tensor eletromagnético é definido como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , e  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Na sequência, consideremos que o elétron esteja submetido a um campo magnético fraco e constante, direcionado no eixo  $z$ , de forma que podemos desprezar termos de  $O(A_i^2)$ . Devido à invariância de gauge, podemos escolher  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = \frac{1}{2}Bx^2$  e  $A_2 = -\frac{1}{2}Bx^1$ , o que leva à  $F_{12} = B$ . Neste limite, a primeiro termo que aparecem na Eq. (2) se torna

$$\begin{aligned} D_i^2 &= \partial_i^2 - ie(\partial_i A_i + A_i \partial_i) + O(A_i^2) \\ D_i^2 &= \partial_i^2 - ieB(x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1) + O(A_i^2) \\ D_i^2 &= \vec{\nabla}^2 - e\vec{B} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) + O(A_i^2), \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\vec{L} = (\vec{x} \times \vec{p})$  é o operador momento angular orbital. Note que, o momento angular orbital gera um momento magnético orbital que interage com o campo magnético presente no sistema.

Como a solução total da equação de Dirac é uma combinação das soluções linearmente independentes, podemos substituir  $\psi \rightarrow \psi e^{-imt}$  na Eq. (2), onde fatoramos a energia de repouso do elétron para que con-

sideremos o caso não relativístico [2]. Utilizando que

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Então, no limite não relativístico o segundo termo da Eq. (2) se torna

$$\begin{aligned} \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &\rightarrow \frac{e}{2}\sigma^3(F_{12} - F_{21}) \\ &= \frac{e}{2}2\sigma^3 B = 2e\vec{B} \cdot \vec{S}. \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo as Eqs. (3) e (5) na Eq. (2) e desprezando as derivadas temporais de ordem superior, obtemos a equação de Pauli

$$\left[ -i\partial_t - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{e}{2m}\vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}) \right] \psi = 0. \quad (6)$$

Desse modo, verificamos que o momento angular de spin tem uma interação com o campo magnético externo duas vezes mais intensa que o momento angular orbital. O fator 2 na frente do spin é conhecido como o *fator  $g$  de Dirac*.

A predição que  $g = 2$  foi historicamente relevante para confirmar a validade da equação de Dirac. Entretanto, com os avanços das técnicas experimentais, no final da década de 1940, um valor mais preciso para o momento magnético do elétron foi encontrado, de  $2.00118 \pm 0.00003$ . Então, um dos desafios da QED passou a ser derivar o chamado *momento magnético anômalo do elétron*, também conhecido como fator  $g - 2$ .

Para calcular esta quantidade dentro do formalismo da QED é conveniente decompor o elemento de matriz de uma corrente eletromagnética,  $J^\mu$ , em sua estrutura tensorial Lorentz mais geral, ou seja,

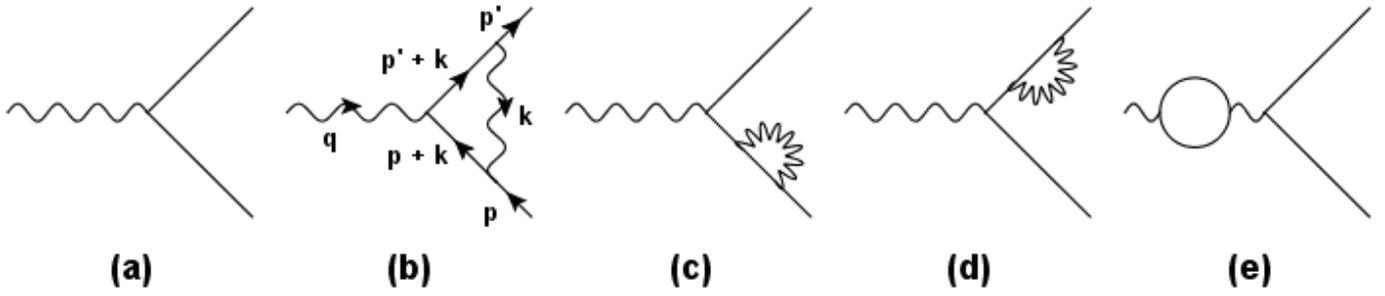


Figura 1: Diagramas em nível de árvore (a) e as correções em 1-loop (b)-(e).

$$\langle p', s' | J^\mu(0) | p, s \rangle = \quad (7)$$

$$\bar{u}_{s'}(p') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u_s(p), \quad (8)$$

onde  $|p, s\rangle$  denota o estado com momento  $p$  e polarização  $s$  e  $q \equiv (p' - p)$ . As funções  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  são os chamados *fatores de forma*.

Utilizando a decomposição de Gordon no lado direito da Eq. (8), esta equação pode ser rescrita em momento transferido  $q = 0$  na forma

$$\bar{u}_{s'}(p') \left\{ \frac{(p' + p)^\mu}{2m} F_1(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} [F_1(0) + F_2(0)] \right\} u_s(p).$$

O primeiro fator de forma,  $F_1(0) = 1$ , é a carga elétrica, ao passo que o segundo representa o momento magnético do elétron. Notamos que este último é deslocado por um fator  $1 + F_2(0)$ , sendo exatamente esta a quantidade que iremos determinar utilizando a QED.

### 3 Discussão e resultados

No painel (a) da Figura 1 mostramos o diagrama em nível de árvore do vértice fóton-elétron, e nos quatro painéis (b)-(e) suas respectivas correções em 1-loop. Exceto o diagrama (b), todos os demais são

proporcionais  $\gamma^\mu$ , contribuindo apenas para o fator de forma  $F_1(q^2)$ . Assim, a única contribuição para  $F_2(q^2)$  é devida exclusivamente ao diagrama (b).

Aplicando as regras de Feynman para o diagrama (b), encontramos que a correção do vértice,  $\Gamma^\mu$ , que está associada ao fator de forma  $F_2(q^2)$ , pode ser escrita como

$$\Gamma^\mu = -ie^2 \int_k \frac{N^\mu}{D}, \quad (9)$$

onde introduzimos a notação  $\int_k = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  e estabelecemos as definições

$$N^\mu = \gamma^\nu (\not{p}' + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\nu \quad (10)$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{k^2 [(p' + k)^2 - m^2] [(p + k)^2 - m^2]}.$$

Utilizando a parametrização de Feynman, podemos reescrever o denominador da Eq. (10) como

$$\frac{1}{D} = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{1}{[k^2 + 2k(xp' + yp)]^3}, \quad (11)$$

Agora, fazendo a mudança de variável  $k \rightarrow \ell - (xp' + yp)$  e usando que  $p'^2 = p^2 = m^2$  e  $q^2 = 2m^2 - 2pp'$ , o denominador da Eq. (11) pode ser expresso como

$$\frac{1}{D} = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{1}{(\ell^2 - \Delta^2)^3}, \quad (12)$$

com  $\Delta^2 = (x + y)^2 m^2 - xyq^2$ .

Já no numerador faremos as substituições

$$P'^\mu = (1 - x)p'^\mu - yp'^\mu$$

$$P^\mu = (1 - y)p^\mu - xp'^\mu, \quad (13)$$

o que nos leva à

$$N^\mu = \gamma^\nu (\not{P}' + \not{\ell} + m) \gamma^\mu (\not{P} + \not{\ell} + m) \gamma_\nu. \quad (14)$$

Substituindo os resultados das Eqs. (12) e (14) na Eq. (9), chegamos na seguinte integral para a correção do vértice

$$\Gamma^\mu = -i2e^2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int_\ell \frac{N^\mu}{(\ell^2 - \Delta^2)^3}. \quad (15)$$

Antes de prosseguir no cálculo desta integral, podemos fazer as seguintes observações que irão simplificar os nossos cálculos.

1. Pela Eq. (8) podemos observar que termos proporcionais a  $\gamma^\mu$  contribuem somente para o fator de forma  $F_1(0)$  e, portanto, podem ser desprezados, já que queremos determinar  $F_2(0)$ .
2. Os termos lineares em  $\ell$  no numerador, “do tipo  $\ell_\rho$ ”, produzirão funções ímpares, que quando integradas em limite simétrico dão zero.
3. Já o termo quadrático em  $\ell$ , “do tipo  $\ell_\lambda \ell_\rho \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho$ ”, após fatorarmos as matrizes de Dirac, ele nos levará a uma integral com dois índices de Lorentz,  $I_{\lambda\rho}$ , que deve ser simétrica pela troca de  $\lambda \leftrightarrow \rho$ . Como o resultado desta integral deve ser independente de  $\ell$  (variável de integração), o resultado só pode ser proporcional ao tensor métrico, ou seja,  $I_{\lambda\rho} = Rg_{\lambda\rho}$ . Assim a contribuição do termo completo será  $\sim \ell^2 \gamma^\mu$ , e pode ser descartado, pois é proporcional à  $\gamma^\mu$  [1].
4. Já para o termo  $m\gamma^\nu (\not{P}' \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{P}) \gamma_\nu$ , que é independente de  $\ell$ , fazemos o uso da identidade  $\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\nu = 4g^{\alpha\beta} I_4$ , sendo  $I_4$  a matriz identidade em 4D, o que nos permite reescrever a expressão como  $4m(P'^\mu + P^\mu)$ .

Agora utilizando a Eq. (13) obtemos  $4m[(1-2x)p'^\mu + (1-2y)p^\mu]$ . Podemos separar a integral em duas, intercambiar  $x$  e  $y$  em uma delas e unir as expressões novamente, fato permitido pelo denominador ser simétrico pela troca  $x \leftrightarrow y$ . Obtemos assim  $4m(1-x-y)(p'^\mu + p^\mu)$ , como primeiro termo do numerador.

5. Já para o termo  $\gamma^\nu \not{P}' \gamma^\mu \not{P} \gamma_\nu$  utilizamos a identidade  $\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = -2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\lambda$  e reescrevemos como  $-2\not{P} \gamma^\mu \not{P}'$ . Utilizando mais uma vez a Eq. (13), e lembrando que estes termos encontram-se entre bispinores que satisfazem as equação de Dirac,  $\bar{u}(p') \not{p}' = m\bar{u}(p')$  e  $\not{p} u(p) = mu(p)$ , podemos, então, reescrever o termo como

$$\begin{aligned} & -2\not{P} \gamma^\mu \not{P}' = \quad (16) \\ & -2[(1-y)\not{p} - xm] \gamma^\mu [(1-x)\not{p}' - ym]. \end{aligned}$$

Note que podemos eliminar o termo quadrático em  $m$  por ser proporcional a  $\gamma^\mu$ . Depois, utilizando  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , podemos transformar  $\not{p} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p}'$  em  $p^\mu + p'^\mu$ , obtendo assim  $2m(p^\mu + p'^\mu)[x(1-x) + y(1-y)]$  para o termo linear em  $m$ . Por fim, para o termo independente de  $m$ ,  $\not{p} \gamma^\mu \not{p}'$  pode ser convertido em  $(p^\mu + p'^\mu)m$  novamente trocando  $\not{p}'$  por  $m$  devido ao bispinor  $u(p)$ . Logo,  $-4m(p'^\mu + p^\mu)(1-x)(1-y)$  é o último termo obtido para o numerador.

Somando as contribuições dos itens 4 e 5 acima, obtemos que o numerador é dado por

$$N^\mu = 2m(p'^\mu + p^\mu)(x+y)(1-x-y). \quad (17)$$

Para calcular a integral (15) na variável  $\ell$ , fazemos a rotação de Wick, convertendo

a integral do espaço de Minkowski para o euclidiano, o que nos leva ao resultado

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta^2 + i\epsilon)^3} = -\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta^2}, \quad (18)$$

onde o fator  $i\epsilon$  surge devido aos propagadores envolvidos. Nesse caso,  $\Delta^2 = (x+y)^2 m^2$ , sendo o termo  $xyq^2$  zerado, pois estamos interessados em  $F_2(0)$ . Por fim, ao integrarmos sobre os parâmetros de Feynman, obtemos

$$\Gamma^\mu = -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{p^\mu + p'^\mu}{2m}. \quad (19)$$

Ainda, pela identidade de Gordon podemos reescrever o vértice de modo a obter

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu [F_1(q^2) + F_2(q^2)] - \frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} F_2(q^2). \quad (20)$$

Comparando as Eqs. (19) e (20) chegamos que

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (21)$$

sendo este o resultado obtido por Schwinger em 1948 para a correção do fator  $g$  do elétron, já que  $F_2(0) = g - 2$  [3].

## 4 Conclusões

Neste trabalho revisitamos um dos cálculos mais emblemáticos da QED, o momento magnético anômalo do elétron. A determinação do fator  $g - 2$  foi realizada em 1-loop, ou seja, em  $O(\alpha)$  em teoria de perturbação, reproduzindo o resultado obtido por Schwinger em 1948.

Atualmente os cálculos teóricos para o momento magnético anômalo do elétron já foram realizados até  $O(\alpha^5)$ , onde existem 12672 diagramas que precisam ser analisados. Utilizando o resultado destes cálculos, predição teórica da QED concorda com

o valor medido experimentalmente em 10 números significativos, ou seja, QED possui uma precisão de 1 parte em 10 bilhões ( $10^{10}$ ). Este impressionante resultado faz com que o momento magnético anômalo seja a predição teórica verificada experimentalmente mais precisa da história das ciências.

## Referências

- [1] A. Lahiri; B. P. Pal. *A First Book of Quantum Field Theory*. Índia: Narosa Publishing House, 2004.
- [2] T. Lancaster; S. J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. New York, USA: Oxford University Press, 2014.
- [3] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. New Jersey, USA: Princeton University Press, 2010.