



# MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS AMBIENTAIS EM RESILIÊNCIA ECOLÓGICA E EUTROFIZAÇÃO DE LAGOS

**Palavras-Chave:** Engenharia Ambiental, Eutrofização, Equações Diferenciais Ordinárias

**Autores(as):**

**Laura Alencar Rodrigues, FT - UNICAMP**

**Prof. Dr. Diego Samuel Rodrigues, FT - UNICAMP**

---

## 1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO

Em uma sociedade marcada pela crescente preocupação com questões ambientais, pode ser vista como de interesse público a possibilidade de prever a evolução de alguns ambientes, quando submetidos a certas condições, e determinar seus consequentes impactos, tendo em vista a repercussão global de desequilíbrios ambientais de origem antrópica. Em meio a isso, as ciências ambientais e matemáticas, quando vinculadas, buscam desenvolver ferramentas que auxiliem em tais previsões, como se aborda neste projeto de pesquisa, onde é estudada a modelagem matemática de sistemas ambientais em resiliência ecológica e eutrofização de lagos (WAINWRIGHT; MULLIGAN, 2012).

No cenário em questão, onde serão abordadas condições bioquímicas de um meio hídrico, em situações de eutrofização, para que ocorra a restauração do ecossistema são indispensáveis medidas de controle das fontes geradoras do quadro indesejado (ESTEVES, 1998). É neste ponto em que se encaixa o uso das equações diferenciais ordinárias, em que as fontes interferentes no equilíbrio biológico podem ser estudadas e relacionadas de forma a modelar a variação de quantidades de interesse ao longo do tempo. Com isso, torna-se possível viabilizar a previsão de comportamentos do corpo d'água quando submetido a certas alterações em determinados parâmetros considerados interferentes. Desenvolver um estudo nessa perspectiva é o propósito do presente trabalho.

## 2 METODOLOGIA

A pesquisa proposta foi dividida a partir dos seguintes referenciais teórico-práticos:

- A. Sistemas dinâmicos
  - a. Teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias (EDOs).
  - b. Resiliência ecológica e biestabilidade de ecossistemas ambientais.
- B. Computação científica
  - a. Aspectos gerais de computação científica e linguagem de programação.
  - b. Métodos para solução numérica de sistemas de EDOs.
- C. Modelagem ambiental
  - a. Elaboração, verificação e validação de modelos ambientais.
  - b. Fundamentos de limnologia, com foco em eutrofização.

### 3 DESENVOLVIMENTO

#### 3.1 Modelagem Matemática da Eutrofização de Lagos por Meio do Estudo da Biestabilidade de Ecossistemas Ambientais

Diversos parâmetros podem ser considerados como influentes no comportamento de um ecossistema. Para convergí-los em construções matemáticas representativas, o conceito de biestabilidade de ecossistemas foi utilizado como embasador neste estudo. Ele resume o comportamento de um ambiente aquático em dois estágios marcantes, conforme o grau de estabilidade do meio. Os dois pontos homeostáticos que embasam a teoria são: o estado claro (oligotrófico) e o estado turbido (eutrófico). Sendo que, de modo a acompanhar o desempenho do ecossistema, conforme as variações ambientais da região, suas condições podem transicionar entre as duas condições tróficas (SCHEFFER; HOSPER; MEIJER; MOSS, 1993). De modo geral, portanto, mudanças de regime em ecossistemas são caracterizadas como transformações abruptas de estado, amplas, e persistentes. Não obstante, é imprescindível entender a caracterização de transições de regimes ecológicos do ponto de vista dinâmico, como o modelo matemático que segue:

Seja  $x=x(t)$  uma quantidade não-negativa, no tempo  $t$ , associada a uma propriedade indesejada de um determinado sistema ambiental. De forma simples, a evolução de  $x(t)$  pode ser modelada pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx + rf(x) \quad (1)$$

em que  $a$  representa um fator ambiental externo que promove o aumento de  $x$ ,  $b$  é a taxa na qual  $x$  diminui devido a uma auto recuperação do ecossistema e  $r$  é a taxa na qual  $x$  é produzido por retroalimentação positiva, por sua vez modelada por uma função  $f=f(x)$ , suposta diferenciável. Os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $r$  e a imagem de  $f$  são não-negativos.

No contexto de interesse,  $x$  é interpretado como a concentração de um nutriente que promove aumento da biomassa de fitoplâncton (ex: fósforo), gerando turbidez;  $a$  é taxa de descarga de nutrientes na água (em concentração por unidade de tempo);  $b$  é a taxa de "decaimento" de nutrientes (valor por unidade de tempo) e  $r$  é a taxa máxima de reciclagem interna do nutriente em questão, em concentração por unidade de tempo (CARPENTER; LUDWIG; BROCK, 1999).

Para a Equação 1, os pontos de equilíbrio são dados pela interseção das curvas dos termos sorvedouro ( $bx$ ), que representa a parte negativa da função que modela a redução concentração de fósforo é reduzida, e fonte ( $a+rf(x)$ ), parcela positiva da equação que representa a entrada de fósforo no ecossistema.

Para fixar ideias, seja  $f$  dada pela por

$$f(x) = \frac{x^p}{x^p + h^p} \quad (2)$$

em que o parâmetro  $p>0$  é denominado índice de Hill e  $h>0$  é tal que  $f(h)=0.5$ . Se  $p>1$ , então  $p$  determina a inclinação da reta tangente no ponto de mudança de concavidade  $x_c$  de  $f(x)$ , o qual se dá em  $x=h$ , como mostra a Figura 1.

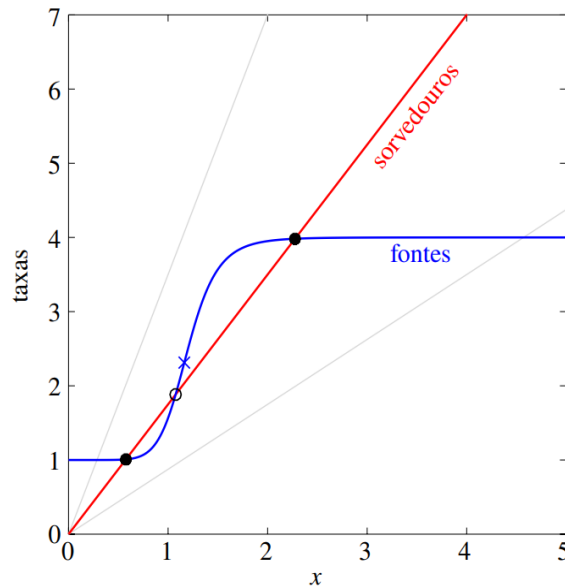


Figura 1: Curvas das taxas de variação dos termos fonte e sorvedouro da equação 1, com  $f(x)$  dada pela equação 2. A linha diagonal representa os sorvedouros de  $x$  e a curva sigmoide as fontes de  $x$ . Círculos fechados indicam equilíbrio estável, e círculo aberto o equilíbrio instável. O ponto de mudança de concavidade da curva fonte está marcado com o símbolo  $x$ .

### 3.2 Estudo do modelo de Streeter Phelps

O modelo de Streeter-Phelps consiste em uma modelagem matemática que representa o comportamento bioquímico de um rio baseado nas concentrações de matéria orgânica e  $O_2$  presentes no meio analisado. Para isso, define-se  $Z$  ( $mg/L$ ) como a variável representante da concentração de matéria orgânica degradável e  $X$  ( $mg/L$ ) da concentração de oxigênio dissolvido.

Em seguida, delimita-se quais processos bioquímicos o modelo considera, tendo em vista a abundância de interações que ocorrem no meio aquático. Nesse contexto, foram escolhidos:

- Degradação de matéria orgânica por, exclusivamente, bactérias aeróbicas;
- Consumo de oxigênio durante a mineralização da matéria orgânica; e
- Troca gasosa de oxigênio entre a superfície da água e a atmosfera.

Sendo assim, é possível descrever o comportamento do parâmetro  $Z$  conforme a EDO:

$$\frac{d}{dt}Z = -K_d Z \quad (3)$$

a qual considera  $K_d$  uma taxa de decaimento para  $Z$ , e do parâmetro  $X$  por meio de

$$\frac{d}{dt}X = -K_d Z s + K_a (X_{sat} - X) \quad (4)$$

em que:

- $s$  é o fator estequiométrico da equação química de mineralização da matéria orgânica;
- $K_a$  é a taxa de aeração, ou seja, de trocas gasosas entre a superfície aquática e a atmosfera; e
- $X_{sat}$  é o nível de saturação de  $O_2$ .

Para melhor desenvolvimento dos cálculos, as variáveis são redefinidas sendo:

- $Z \rightarrow L$  em que  $L$  representa a demanda bioquímica de oxigênio (DBO); e
- $X \rightarrow D = X_{sat} - X$  em que  $D$  é o déficit de saturação de  $O_2$ .

Assim sendo, as Equações 3 e 4 podem ser reescritas como:

$$\frac{d}{dt}L = -K_d L \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}D = -K_d L + K_a D \quad (6)$$

as quais quando manipuladas e desenvolvidas resultam em:

$$L = L_0 e^{-K_d t} \quad (7)$$

$$D = \frac{K_d L_0}{K_a - K_d} (e^{-K_d t} - e^{-K_a t}) + D_0 e^{-K_a t} \quad (8)$$

Prosseguindo, com o objetivo de obter a solução analítica do referido sistema de equações diferenciais ordinárias, foi utilizado o software Wolfram Mathematica. O código desenvolvido está apresentado na Figura 2, no qual também são definidos os valores dos parâmetros. As curvas da solução analítica obtida estão apresentadas na Figura 3.

```
(*Definição das funções*)
L[t_, p_] := p[[2]] * Exp[-p[[4]] * t];
Deficit02[t_, p_] := p[[4]] * p[[2]] / (p[[3]] - p[[4]] * (Exp[-p[[4]] * t] - Exp[-p[[3]] * t]) + p[[1]] * Exp[-p[[3]] * t]);

(*Saturação de O2 em função da temperatura*)
Xsat[p_] := 14.652 - 0.41022 * p[[5]] + 0.007991 * p[[5]]^2 - 7.7774 * E^(-5) * p[[5]]^3;

(*Parâmetros*)
p = {0, 10, 1.8, 0.5, 12};

(*Resolver o sistema analiticamente*)
Lsol[t_] := L[t, p];
Dsol[t_] := Deficit02[t, p];
Xsol[t_] := Xsat[p] - Deficit02[t, p];

(*Plotar os gráficos separadamente*)
plotL = Plot[Lsol[t], {t, 0, 5}, AxesLabel -> {"t", "L"}, PlotStyle -> Blue, PlotRange -> {Automatic, {0, All}}];
plotD = Plot[Dsol[t], {t, 0, 5}, AxesLabel -> {"t", "D"}, PlotStyle -> Red, PlotRange -> {Automatic, {0, All}}];
plotX = Plot[Xsol[t], {t, 0, 5}, AxesLabel -> {"t", "X"}, PlotStyle -> Green, PlotRange -> {Automatic, {All, All}}];

(*Exibir os gráficos*)
{plotL, plotD, plotX}
```

Figura 2: Código desenvolvido no Software Wolfram Mathematica para a solução analítica do sistema de equações diferenciais representado pelas equações 7 e 8 por meio da função `Dsolve`.

Com isso, são obtidas as seguintes curvas que descrevem o comportamento do ecossistema analisado conforme suas concentrações de oxigênio dissolvido e matéria orgânica em um intervalo de 5 dias.

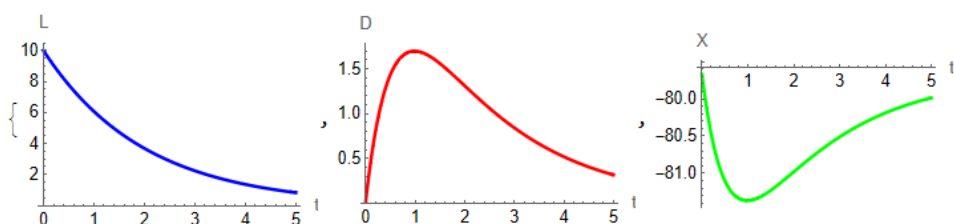


Figura 3: Gráficos obtidos para o comportamento bioquímico de um rio por meio dos parâmetros fornecidos pelo modelo de Streeter Phelps.

### 3.3 Qualidade da Água e Eutrofização de lagos

Os estágios de trofia de um lago ou rio se adequam ao desenvolvimento do sistema de modo coerente quanto à ascendente produção de matéria orgânica seguida de um crescimento populacional e metabólico, tendo em vista o aumento dos elementos químicos essenciais à produtividade primária. Tal variação na quantidade de nutrientes pode ser causada de forma natural ou artificial, sendo a segunda a de maior impacto na homeostase do meio e interesse científico. Com o crescimento populacional e o intenso processo de industrialização, o uso de fertilizantes e produtos ricos em polifosfatos ganharam espaço na evolução de ambientes aquáticos eutróficos (ESTEVES, 1998).

Em meio a isso, para a avaliação do comportamento de lagos variados a ser desempenhado sob alteração das condições físicas e químicas normais básicas, cabe observar quais serão as variáveis mais representativas a serem consideradas na modelagem matemática. Quanto aos parâmetros químicos, considera-se como conveniência a utilização da concentração de fósforo como primordial na elaboração dos cálculos tendo em vista sua majoritária presença nos principais poluentes aquáticos e papel fundamental no metabolismo de seres vivos. Outros parâmetros ambientais como temperatura, pH, concentração de nitrogênio e oxigênio dissolvidos também são alvos de frequentes estudos pelo forte vínculo com os estágios tróficos do meio. Referente aos parâmetros morfométricos, segundo os estudos demasiados de Von Sperling et al. (2014), a profundidade pode ser dita como medida de maior relação com a trofia do ambiente, tendo em vista sua interferência na viabilidade de penetração da energia luminosa ao longo da coluna d'água e consequente influência em processos metabólicos primários como a fotossíntese de algas e cianobactérias.

Dando maior enfoque à concentração de fósforo no meio, tal variável pode sugerir três tipos de classificação para as condições tróficas de um lago: reversível, histerético e irreversível. Elas dizem respeito a capacidade de consumo do fósforo excedente adicionado ao ambiente e sua consequente recuperação. Quando o lago consegue consumir todo o excesso de nutrientes encontrado, classifica-se o ecossistema como de recuperação reversível. Para situações em que as condições do meio requerem alterações extremas e determinado tempo para se estabilizarem, o ambiente é classificado como histerético. Quando a recuperação não depende apenas da redução de fósforo e sim de outros fatores, as condições são irreversíveis (CARPENTER; LUDWIG; BROCK, 1999).

## 5 BIBLIOGRAFIA

WAINWRIGHT, John; MULLIGAN, Mark (Ed.). **Environmental modelling: finding simplicity in complexity**. John Wiley & Sons, 2 ed., 2012.

CARPENTER, Stephen R.; LUDWIG, Donald; BROCK, William A. Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change. **Ecological applications**, v. 9, n. 3, p. 751-771, 1999.

ESTEVES, Francisco de Assis. **Fundamentos de limnologia**. Interciência, 1998.

SCHEFFER, Marten et al. Alternative equilibria in shallow lakes. **Trends in ecology & evolution**, v. 8, n. 8, p. 275-279, 1993. VON SPERLING, Marcos. **Introdução à qualidade das águas e ao tratamento de esgotos**. Editora UFMG, 1996.