



Introdução à Cosmologia e Medidas da Função de Correlação de Dois Pontos de Galáxias

Luiz Henrique Fonteles Da Silveira-IFGW-UNICAMP
Prof^a.Dra.Flávia Sobreira-IFGW-UNICAMP

Palavras-Chave:Cosmologia,Relatividade,função de correlação de dois pontos

1 Introdução

Desde os primórdios da sociedade, a curiosidade humana nos motiva a tentar entender o nosso universo e sua origem, essa procura por uma explicação para todo universo é conhecida como cosmologia. Em suas origens, a cosmologia utilizava mitos e filosofia para suas descrições do universo, como a cosmologia de Platão e as explicações de diversas religiões para a criação do universo. A cosmologia moderna, que se baseia em ciência, começou realmente no início do século XIX com o paradoxo de Olbers, no entanto, os estudos ficaram praticamente apenas no campo teórico até o começo do século XX quando começou a ser possível obter certos dados, como os dados de Hubble que comprovaram que o universo estava em expansão. Inspirados por esse passado e motivados pelo mesmo anseio de entender o cosmos com um todo que produzimos essa iniciação científica(IC).

Esse trabalho de IC tem como objetivo começar o estudo da cosmologia. Para atingir esse propósito dividimos essa IC em duas partes: sendo a primeira parte estudo da teoria da cosmologia de *background*, que busca entender o cosmos em suas maiores escalas, sempre o tratando como homogêneo e isotrópico. Já a segunda parte consiste em um estudo experimental, que tem o objetivo de medir a função de correlação com diversos estimadores e compará-los para medir suas confiabilidades.

Nosso estudo abrangeu diversos assuntos, começando com relatividade geral e depois equações de Einstein, que são as principais ferramentas utilizadas para construir a cosmologia moderna. Depois disso, estudamos as métricas de Friedmann-Robertson-Walker que regem a geometria do nosso universo e as aplicamos a equação de Einstein para chegarmos as equações de Friedmann, sendo essas as equações que regem a evolução do nosso universo a partir de certas condições iniciais. Por fim, resolvemos as equações de Friedmann para universos simples, como por exemplo, um universo com apenas matéria.

Para a parte experimental decidimos estudar a função de correlação $\xi(r)$, que é definida como o excesso de probabilidade de haver pares de galáxias separados por uma distância r . Ela é calculada comparando um catálogo real de galáxias com um catálogo de galáxias gerado aleatoriamente. Isso permite avaliar a distribuição das galáxias, ou de forma mais geral, quantificar o quão homogêneo o universo é para determinadas escalas de distância. No entanto, para calculá-la existem diversos estimadores, nosso estudo tem como objetivo testar o nível de confiabilidade deles, quando comparados ao estimador de Landy-Szalay[1] que é o estimador que consideraremos correto.

2 Metodologia

A metodologia utilizada na parte teórica desse trabalho consistia em principalmente duas coisas: no estudo de cosmologia com o livro base BAUMANN, Daniel. *Cosmology*, 2022[2] e nas reuniões semanais com a orientadora, que consistiam em uma apresentação simples, que tinha como objetivo expor o que foi estudado de forma a ajudar no processo de aprendizagem, além de servir como uma forma de sanar dúvidas e descobrir possíveis lacunas ou erros no entendimento do conteúdo.

Seguindo essa estrutura, começamos nossos estudos por relatividade geral, primeiro começamos por definir quadri- vetores que são vetores com um componente temporal, com isso podemos fazer um paralelo entre vetores tridimensionais e quadri- vetores para a definição de distância, assim definindo o intervalo espaço-temporal:(adotando $c=1$ daqui para frente)

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (1)$$

que consiste basicamente na diferença de dois quadrivetores de posição, essa nova definição de distância se torna muito útil quando tratamos de relatividade, pois o intervalo espaço-temporal não varia com o referencial devido ao seu componente temporal, diferentemente da distância. Sabendo disso, podemos definir o tempo próprio τ , que é o tempo medido no referencial que a partícula está em repouso e assim chegar a uma definição de quadri-velocidade e por consequência quadrimomento:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, v), \quad P^\mu = mU^\mu, \quad (2)$$

sendo x^μ o quadrivetor(tensor) de posição e μ os índices dos tensores. Analisando o quadrimomento podemos perceber que os componentes espaciais são o momento relativístico $p = \gamma mv$ e o temporal é a energia $E = \gamma m$.

Estas grandezas são de grande importância para a relatividade, dado que elas são as responsáveis pela curvatura do espaço-tempo, com isso em mente, podemos construir um tensor $T^{\mu\nu}$, 4x4, que nos diz a variação das densidades de quadrimomento em cada direção, com μ sendo a direção de variação e ν o índice do quadrimomento, assim temos que T^{00} =densidade de energia= $-\rho$, T^{0i} =densidade de momento, T^{i0} =fluxo de energia, T^{ij} =fluxo de momento. Também podemos observar que como esse tensor mede a variação de energia em uma região e energia não pode se criar nem ser destruída, então devido à conservação de energia $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, (a versão da relatividade geral dessa equação é $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ [2]). Para um fluido perfeito temos que o seu tensor de energia-momento no seu próprio referencial é:

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (3)$$

sendo p a pressão. Esse resultado é bem intuitivo, pois como por definição ele não tem viscosidade ou cisalhamento, não tem como haver fluxo de energia ou momento, fazendo todos os elementos de fluxo fora da diagonal serem 0 e como ele está parado a densidade de momento também é 0.

Dito isto, podemos fazer um paralelo com a equação de Poisson da gravidade newtoniana para tentar chegar a uma versão relativística. [2]

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (4)$$

Do lado esquerdo vemos o potencial gravitacional ϕ e sabemos que sua generalização relativística é a métrica $g_{\mu\nu}$ [2], que nos diz o formato do espaço-tempo. Já no lado direito temos uma constante e ρ , como nesse lado temos energia podemos esperar que seu paralelo relativístico seja o tensor de momento-energia. Sendo assim, precisamos do Tensor de Einstein, que descreve a geometria do espaço-tempo e é consistente com a conservação do tensor de momento-energia.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (5)$$

sendo $R^{\mu\nu}$ o tensor de Ricci[2], um tensor de 2 índices que descreve a geometria do espaço e R o escalar de Ricci, que é a contração dupla do tensor de Ricci. Assim podemos chegar a equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6)$$

O entendimento dessa equação é crucial para o estudo de cosmologia, ela relaciona diretamente a curvatura do espaço ao tensor de energia momento, ou seja, se pudermos descrever a geometria do universo vamos obter o conteúdo energético do universo e vice-versa, mas para isso precisamos primeiro entender como utilizar a métrica para descrever a geometria do universo. A métrica do espaço-tempo é um objeto matemático que descreve a geometria do espaço-tempo, nos permitindo, entre outras coisas, transformar coordenadas que dependem do referencial no intervalo espaço-temporal, que é invariante.

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7)$$

(A partir de agora estaremos usando a notação de einstein nesse texto). Para a relatividade restrita a métrica é simplesmente $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, porém para a relatividade geral a métrica deixa de ser simples e começa a depender da posição no espaço-tempo. Devido à homogeneidade e isotropia do universo podemos representar a métrica em partições tridimensionais dependentes de t .

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j)^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dl^2. \quad (8)$$

Sendo γ_{ij} a métrica espacial, e $a(t)$ o fator de escala que rege a expansão do universo, nos dizendo quão maior ou menor as distâncias vão ser em um tempo t . Para que possamos utilizar essa métrica na equação de Einstein precisamos primeiro estudar a γ_{ij} . Sabemos que o universo tem que ser homogêneo e isotrópico, logo a curvatura do universo tem que se manter constante, pois uma distribuição que é homogênea ou isotrópica em um espaço pode não ser em outro de curvatura diferente. Sendo assim só temos 3 casos possíveis de curvatura para o espaço: espaço plano, nesse caso linhas paralelas não se cruzam nem se distanciam e $dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$. Espaço esférico, nesse caso linhas paralelas eventualmente se

cruzam devido à curvatura positiva e $dl^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \mathbf{x}^2 + u^2 = R_0^2$. Espaço hiperbólico, nesse caso linhas paralelas se distanciam devido à curvatura negativa e $dl^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \mathbf{x}^2 - u^2 = -R_0^2$. Podemos unificar essas fórmulas em uma:

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 - k\mathbf{x}^2}, \quad (9)$$

com $k=0$ para o espaço plano, $k=+1$ para o espaço esférico e $k=-1$ para o espaço hiperbólico. Sabendo disso podemos utilizar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para chegar na métrica de Friedmann-Robertson-Walker que governa nosso universo:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (10)$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 \sin^2\theta d\phi^2$. E devido a uma simetria de escala utilizamos como convenção o fator de escala atualmente como sendo $a(t_0) = 1$.

Agora que temos a métrica, podemos usá-la para calcular o tensor e o escalar de Ricci, assim obtendo o tensor de Einstein. Para que possamos resolver a equação de Einstein só falta o tensor de energia-momento, por causa da homogeneidade e isotropia do cosmos podemos usar o tensor de energia-momento de um fluido perfeito para descrevê-lo. Sendo assim, podemos resolver a equação de Einstein modificada, que utiliza de uma constante cosmológica Λ , frequentemente atribuída a energia escura, para explicar a expansão acelerada do universo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Resolvendo essa equação obtemos duas das três equações de Friedmann:

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (12)$$

com H sendo o parâmetro de Hubble-Lemaître (geralmente utilizado para medir distâncias usando o *redshift* causado pela expansão do universo). Essa equação nos descreve como a velocidade de expansão do universo varia de acordo com seus componentes. A segunda equação é:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi g}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (13)$$

Essa equação nos descreve como a aceleração da expansão do universo varia de acordo com seus componentes. Utilizando essas duas equações podemos chegar a terceira equação de Friedmann:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho + p), \quad (14)$$

que nos descreve a evolução da densidade dos componentes do universo com o tempo. Para entender melhor como essas equações funcionam resolvemos elas para universos simples, tendo um interesse maior nos universos com apenas um componente e curvatura $k = 0$, pois a curvatura do nosso universo é muito pequena. Assim, obtemos como os fatores de escala variam

$$a(t)_m \propto t^{2/3}, a(t)_r \propto t^{1/2}, a(t)_\Lambda \propto e^t, \quad (15)$$

sendo m para matéria, r radiação e Λ energia escura. Usando a equação 14, e uma equação de estado para cada fase do universo, $p_m = 0, p_r = 1/3\rho, p_\Lambda = -\rho$, obtemos a evolução da densidade de energia com o fator de escala.

$$\rho(a)_m \propto a^{-3}, \rho(a)_r \propto a^{-4}, \rho(a)_\Lambda \propto a^1 \quad (16)$$

Aqui podemos ver a real importância do fator de escala, ele não só nos diz como as grandezas espaciais vão variar com o tempo, mas também como o conteúdo energético varia (a relevância desses resultados será comentada no tópico 4).

Dito isso, se sabe que a curvatura do nosso universo é praticamente zero, logo, é interessante definirmos a densidade crítica, que é igual à densidade atual do universo, por conveniência mediremos todas as densidades em relação à densidade crítica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad \Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad i = m, r, \Lambda \quad (17)$$

Assim podemos reescrever a primeira equação de Friedmann em função de Ω e vamos substituir $t = t_0$:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda, \quad 1 = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda, \quad \Omega_k \equiv \frac{-kc^2}{(R_0 H_0)^2}, \quad (18)$$

assim, sabemos que se $\Omega_0 \equiv \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ é igual a 1.

Para a parte experimental do nosso estudo fizemos um código em python para calcular a função de correlação usando os seguintes estimadores: PeeblesHauser[3] $\xi_{PH}(s)$, DavisPeebles[4] $\xi_{DP}(s)$, Hewett [5] $\xi_{He}(s)$, Hamilton[6] $\xi_{Ha}(s)$ e Landy-Szalay $\xi_{LS}(s)$ (sendo s a escala na qual o estimador está sendo medido). Com essas medidas em mãos, nos tiramos as diferenças relativas de cada uma quando comparadas a ξ_{LS} , essa comparação foi feita para as escalas entre 30Mpc e 180Mpc que forma escolhidas, pois o pico BAO, que é uma medição de importância, aparece na função de correlação por volta de 100Mpc[7]. Utilizamos os dados do *Data release 16*(DR16) do *Sloan Digital Sky Survey*(SDSS)[8], que fornecia os dados reais e os dados gerados por um processo homogêneo de Poisson[9], necessários para o cálculo dos estimadores.

3 Resultados

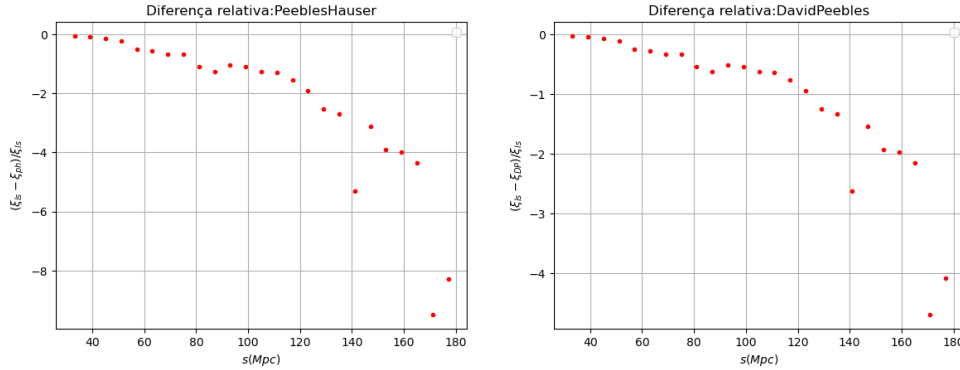


Figura 1: Diferença relativa entre $\xi_{PH}(s)$ e $\xi_{LS}(s)$. Diferença relativa entre $\xi_{DP}(s)$ e $\xi_{LS}(s)$.

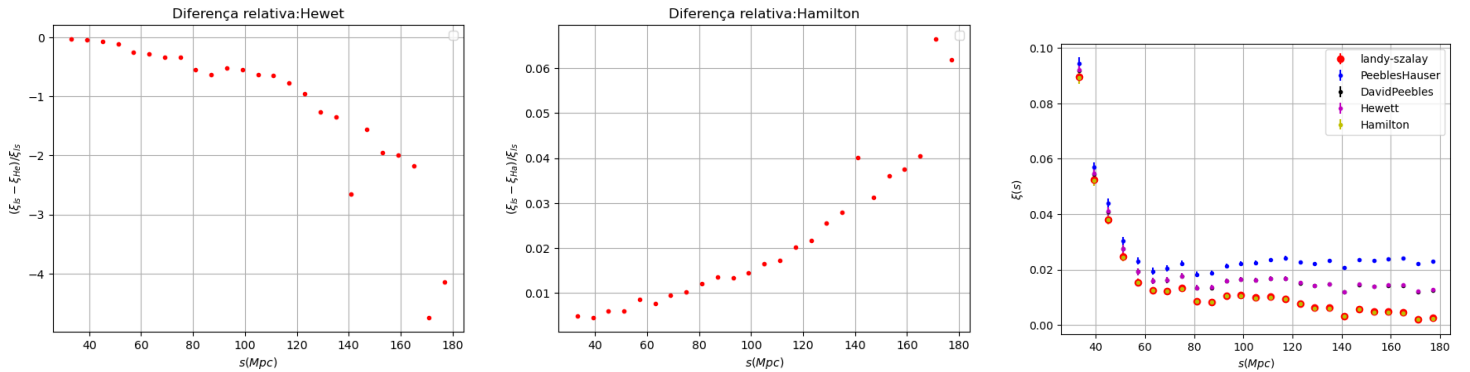


Figura 2: Diferença relativa entre $\xi_{He}(s)$ e $\xi_{LS}(s)$. Diferença relativa entre $\xi_{Ha}(s)$ e $\xi_{LS}(r)$. Gráfico de todos os estimadores pela escala

4 Discussão

Observando os resultados obtidos das equações de Friedmann podemos perceber que, apesar de variarem de forma diferente, os fatores de escala crescem indefinidamente para todos os casos, ou seja, esses universos hipotéticos não acabam com um possível encolhimento, o que não parece uma informação particularmente útil a primeira vista, já que nosso universo é formado por múltiplos componentes. No entanto, nosso universo pode ser dividido em 3 grandes épocas, a primeira é a que radiação dominava e era a principal contribuinte para a energia do universo, a segunda é a que a matéria dominava e era a principal contribuinte para a energia do universo e a última, que é a que nós vivemos atualmente, é a que a energia escura domina, ou seja, podemos aproximar cada uma dessas épocas para um dos 3 casos, assim tendo um entendimento melhor de como a expansão do cosmos se comportou ao longo do tempo.

Ademais, observando os resultados das densidades encontramos algo curioso, as densidades de energia da radiação e de massa diminuem enquanto a da energia escura se mantém a mesma, o que faz sentido se associarmos a energia escura a energia de vácuo, pois a medida que o universo se expande temos mais vácuo, mas também temos mais volume. Também é bom mencionar que é esse resultado que causa as épocas mencionadas.

Em relação aos resultados experimentais, podemos observar que a diferença relativa entre a função de correlação calculada pelo estimador de PeeblesHauser e a calculada pelo estimador de Landy-Szalay está decrescendo, porém, está aumentando consideravelmente em módulo, o que indica que conforme a escala aumenta os resultados do PeeblesHauser perdem sua confiabilidade e começam a superestimar os valores. Para os estimadores de DavisPeebles e de Hewett as diferenças relativas se assemelham, ambas também estão decrescendo, porém, o aumento do módulo é mais sutil, o que indica que conforme a escala aumenta esses estimadores também perdem sua confiabilidade e começam a superestimar os valores, mas ainda são mais confiáveis que o de PeeblesHauser. Por fim, a diferença relativa do estimador de Hamilton é crescente, mas se mantém abaixo de 10%, afetando pouco sua confiabilidade. Essa queda de confiabilidade conforme as escalas aumentam são causadas principalmente pelo efeito de borda[10] que fazem a contagem de galáxias serem subestimadas, por esse motivo utilizamos o estimador de Landy-Szalay como mais confiável, pois ele foi feito de forma que o efeito de borda o afetasse o mínimo possível.

5 Conclusões

A partir dos estudos teóricos apresentados neste texto, fomos capazes de melhor entender que, assim como os componentes do universo afetam a sua evolução, causando diferentes períodos com diferentes taxas de expansão, a expansão também afeta os componentes do universo, causando uma perda ou ganho de energia. Tal conclusão, é bem intuitiva, já que se olharmos para a equação de Einstein, que nos usamos para chegar nesses resultados, é exatamente isso que ela nos diz: a geometria local afeta a energia local, ditando como ela deveria se mover e a energia local impacta a geometria local ditando como ela deveria se curvar.

Para a parte experimental conseguimos chegar no nosso objetivo de testar o quão confiáveis são os estimadores, concluindo que apenas o estimador de Hamilton tem uma diferença relativa baixa ($7% <$) para todas as escalas de interesse, mas também observamos que todos os estimadores concordam quando estamos tratando de escalas menores. Apesar de haver escalas nas quais os valores são de baixa confiabilidade, o comportamento da função continua o mesmo. Não só isso, devido a como o efeito de borda funciona podemos extrapolar para escalas menores que a diferença será menor ainda e que o inverso também é verdade. Ao compararmos nossas conclusões com o *paper* de Kerscher[10], podemos perceber que foi feita uma análise condizente com a realidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]LANDY, Stephen D.; SZALAY, Alexander S. Bias and variance of angular correlation functions. *Astrophysical Journal*, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 412, no. 1, p. 64-71., v. 412, p. 64-71, 1993.
- [2]BAUMANN, Daniel. *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022.
- [3] HAUSER, M. G.; PEEBLES, P. J. E. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. II. The Abell catalog of rich clusters. *Astrophysical Journal*, Vol. 185, pp. 757-786 (1973), v. 185, p. 757-786, 1973.
- [4]HEWETT, Paul C. The estimation of galaxy angular correlation functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 201, n. 4, p. 867-883, 1982.
- [5]DAVIS, Marc; PEEBLES, P. J. E. A survey of galaxy redshifts. V-The two-point position and velocity correlations. *Astrophysical Journal*, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 267, April 15, 1983, p. 465-482., v. 267, p. 465-482, 1983.
- [6]HAMILTON, A. J. S. Toward better ways to measure the galaxy correlation function. *The Astrophysical Journal*, v. 417, p. 19, 1993.
- [7]DES BOURBOUX, Hélión Du Mas et al. Baryon acoustic oscillations from the complete SDSS-III Ly-quasar cross-correlation function at $z = 2.4$. *Astronomy Astrophysics*, v. 608, p. A130, 2017.
- [8]Data release 16,Sloan Digital Sky Survey(SDSS),<https://www.sdss4.org/dr16/spectro/lss>
- [9]MARTINEZ, Vicent J.; SAAR, Enn. *Statistics of the galaxy distribution*. CRC press, 2001.
- [10]KERSCHER, Martin; SZAPUDI, Istvan; SZALAY, Alexander S. A comparison of estimators for the two-point correlation function. *The astrophysical journal*, v. 535, n. 1, p. L13, 2000.