Projeto de um controlador robusto $\mathcal{H}_2$ para um sistema carro-pêndulo

Palavras-Chave: Carro-pêndulo, Rastreamento de trajetória, Ganho escalonado

Autores:

Enzo Gimenez Raffa Gonçalves, FEM, UNICAMP

Prof. Dr. Juan Francisco Camino (orientador), FEM, UNICAMP

INTRODUÇÃO

O carro-pêndulo é um sistema mecânico complexo, caracterizado por sua dinâmica não linear e exigências matemáticas avançadas. Ele pode ser usado como uma simplificação de sistemas desafiadores, tais como foguetes, Segways e *overhead cranes*, conhecidos como ponte rolante ou guindaste de porto [1, 4, 7].

O *overhead crane* consiste em um carro que se move unidirecionalmente, ao qual está acoplada uma carga por meio de um cabo inextensível. À medida que o carro se locomove, a carga translada e rotaciona de forma análoga a um pêndulo. Portanto, movimentos bruscos são indesejados, pois podem danificar o conteúdo da carga [3].

O transporte eficiente de cargas pesadas requer movimentação rápida e precisa entre dois pontos [1, 3]. Esse desafio está relacionado ao problema de rastreamento de trajetória, onde é necessário projetar uma lei de controle para que o sistema mecânico siga uma referência predefinida. No caso do *overhead crane*, esse problema torna-se ainda mais complexo devido à necessidade de controle preciso tanto do carro quanto da carga, garantindo que eles sigam um perfil de trajetória de posição ou velocidade específica ao longo do tempo, superando não linearidades e possíveis perturbações no sistema.

A técnica de controle por ganho escalonado (*gain scheduling*) é particularmente aplicável a este sistema, permitindo uma abordagem modular. Essa estratégia trata o problema não linear como um conjunto de subproblemas lineares [5, 6]. Ao linearizar em diversos pontos de operação distintos e projetar um controlador linear para cada ponto, é possível abordar o sistema não linear de forma mais gerenciável. Além disso, a utilização do problema de controle $\mathcal{H}_2$ fornece uma metodologia eficiente para obtenção de desempenho e robustez, permitindo um controle efetivo mesmo na presença de incertezas e perturbações [2, 8].

Tendo em vista que o ganho escalonado não impõe restrições às estratégias de controle, é possível explorar diferentes abordagens. Com o objetivo de obter robustez, são utilizadas funções de ponderação para modificar as funções de *loop gain*, sensibilidade e sensibilidade complementar [9].

METODOLOGIA

Equações de movimento

O *overhead crane* pode ser modelado como um carro-pêndulo, conforme ilustrado na Figura 1. Nessa representação, as massas do carro e da carga são denotadas por M (kg) e m (kg), respectivamente. O comprimento do cabo é l (m), e a aceleração da gravidade é indicada por g (m/s^2). O deslocamento linear do carro é representado por $q(t)$ (m), enquanto o deslocamento angular da carga é denotado por $\theta(t)$ (rad). Além disso, a força externa aplicada ao sistema é dada por $f(t)$ (N).

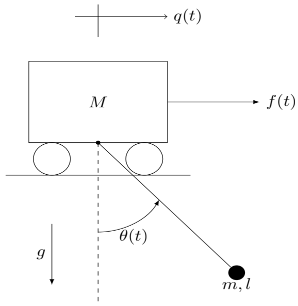

Figura 1: Sistema carro-pêndulo.

A equação de movimento do sistema *overhead crane* é dada por:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{q} + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) &= f \\ l\ddot{\theta} + \cos\theta\ddot{q} + g\sin\theta &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Por meio de desacoplamento e manipulações algébricas, é possível reescrever a equação de movimento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1\ddot{q} - a_2 - a_3 &= f \\ la_1\ddot{\theta} + a_2\cos\theta + a_4 &= -f\cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

em que

$$\begin{aligned} a_1 &= M + m - m\cos^2\theta \\ a_2 &= ml\dot{\theta}^2 \sin\theta \\ a_3 &= mg\sin\theta\cos\theta \\ a_4 &= (M+m)g\sin\theta \end{aligned}$$

A lei de controle $f(t)$ é definido como sendo

$$f(t) = a_1 u(t) - a_2 - a_3 \tag{3}$$

em que $u(t)$ é uma nova lei de controle virtual. Substituindo (3) em (2), obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= u(t) \\ \ddot{\theta}(t)\sec\theta(t) &= \beta(g\tan\theta(t) + u(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

com $\beta = -1/l$. Essa substituição simplifica a equação (2), tornando a dinâmica translacional linear e desacoplada da dinâmica rotacional.

Formulação do problema

Na maioria das aplicações, o *overhead crane* realiza o transporte de uma carga entre dois pontos, sendo $y_p(0) = y_i$, a posição inicial da carga, e $y_p(\infty) = y_f$, a posição final da carga. O deslocamento absoluto horizontal da carga é dado por

$$y_p(t) = q(t) + l\sin\theta(t) \tag{5}$$

Em geral, é desejável que o deslocamento entre y_i e y_f seja realizado no menor tempo possível com mínima oscilação da carga ao longo do movimento. Esse movimento pode ser traduzido em um problema de rastreamento de trajetória, onde y_p deve seguir uma trajetória de referência $r(t)$ com mínimo sobressinal e tempo de acomodação.

Para alcançar esse objetivo, o erro de rastreamento $e(t)$ definido como

$$e(t) = r(t) - y_p(t)$$

deve ser tal que

$$\lim_{t\to\infty} |e(t)| < \epsilon$$

para um ϵ suficientemente pequeno. A referência, neste caso, é assumida como sendo um degrau.

Projeto do controlador

A técnica de controle por ganho escalonado, segundo [6], consiste nos seguintes passos:

1. Linearizar a equação de movimento não linear ao redor de um conjunto de pontos de operação;
2. Projetar um controlador linear, denotado como local, para cada uma das equações linearizadas;
3. Implementar um controlador escalonado composto pelo conjunto de controladores locais e ativados de acordo com uma regra de escalonamento;
4. Verificar a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada composto pelo controlador escalonado e a planta não linear;

Dessa forma, o primeiro passo é linearizar a equação de movimento (4) do *overhead crane* em um ponto de operação. Essa linearização, realizada num ponto de operação arbitrário $\bar{p} = (\bar{\theta}, \bar{\ddot{\theta}})$, resulta na expressão:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= u(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= c_1\theta(t) + c_2 + c_3 u(t) \end{aligned} \tag{6}$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= -\bar{\ddot{\theta}}\tan(\bar{\theta}) + \beta g\sec(\bar{\theta}) \\ c_2 &= \bar{\ddot{\theta}}\tan(\bar{\theta})\bar{\theta} + \beta g\sin(\bar{\theta}) - \beta g\bar{\theta}\sec(\bar{\theta}) \\ c_3 &= \beta\cos(\bar{\theta}) \end{aligned}$$

Procede-se, então, à representação de (6) no espaço de estados. Para tal, define-se o vetor de estados

$$s = \begin{bmatrix} q(t) & \dot{q}(t) & \theta(t) + c_2/c_1 & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^T$$

o que permite reescrever (6) como

$$\dot{s}(t) = A_p s(t) + B_p u(t)$$

com

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

O deslocamento absoluto horizontal (5) é linearizado em torno do ponto arbitrário $\bar{p}$, resultando em

$$\begin{aligned} y_p(t) &= q(t) + l(\sin(\bar{\theta}) - \bar{\theta}\cos(\bar{\theta})) + l\cos(\bar{\theta})\theta(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos(\bar{\theta}) & 0 \end{bmatrix} s(t) + l(\sin(\bar{\theta}) \\ &\quad - \bar{\theta}\cos(\bar{\theta}) - \cos(\bar{\theta})c_2/c_1) \\ &= C_p s(t) + \hat{y}_p = y_g(t) + \hat{y}_p \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} &C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos(\bar{\theta}) & 0 \end{bmatrix}, \qquad y_g(t) = C_p s(t) \\ &\hat{y}_p = l(\sin(\bar{\theta}) - \bar{\theta}\cos(\bar{\theta}) - \cos(\bar{\theta})c_2/c_1) \end{aligned}$$

Definindo a saída da planta linearizada como sendo

$$y_g(t) = y_p(t) - \hat{y}_p = C_p s(t)$$

obtém-se a seguinte representação no espaço de estados da planta local:

$$G = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que o erro de rastreamento passa a ser dado por

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y_p(t) = r(t) - (y_g(t) + \hat{y}_p) \\ &= (r(t) - \hat{y}_p) - y_g(t) = \hat{r}(t) - y_g(t) \end{aligned}$$

com $\hat{r}(t) = r(t) - \hat{y}_p$. Assim, fazer com que a saída da planta local $y_g(t)$ rastreie uma referência virtual $\hat{r}(t)$ leva a saída da planta não linear $y_p(t)$ a rastrear a referência $r(t)$, minimizando o erro $e(t)$.

No projeto dos controladores locais para o rastreamento de trajetória, foi utilizado o diagrama de controle apresentado na Figura 2. Nesse diagrama, as funções de ponderação W_e e W_u influenciam, respectivamente, o erro de rastreamento e o esforço de controle. Além disso, K representa o controlador local, G é a planta linearizada do sistema carro-pêndulo, $\tilde{e}$ denota o erro de rastreamento ponderado, e $\tilde{u}$ a lei de controle ponderado. Uma única função de ponderação é utilizada para todos os projetos locais.

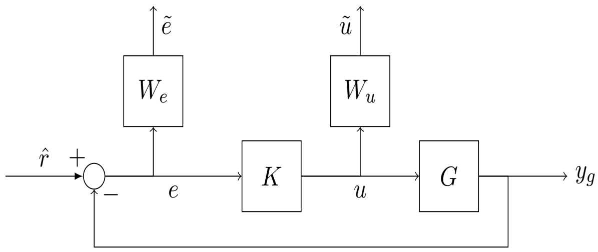

Figura 2: Diagrama de controle.

O problema de rastreamento de trajetória é, então, solucionado utilizando o problema de controle $\mathcal{H}_2$. Para isso, faz-se necessário representar o diagrama de controle da Figura 2 na configuração de planta generalizada, conforme dada pela Figura 3.

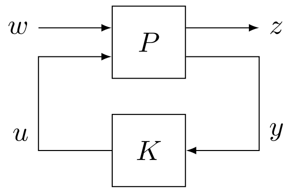

Figura 3: Planta generalizada.

Verifica-se, da Figura 2, que

$$\begin{gathered} y_g = Gu, \qquad u = Ke, \qquad e = \hat{r} - y_g \\ \tilde{u} = W_u u, \qquad \tilde{e} = W_e e \end{gathered}$$

Portanto, os sinais da planta generalizada são dados por

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e e \\ W_u u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e w - W_e G u \\ W_u u \end{bmatrix} \\ y &= e = \hat{r} - y_g = w - Gu \\ w &= \hat{r} \end{aligned}$$

Assim, a relação entre entradas (u e w) e as saídas (z e y) é dada por

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e & -W_e G \\ 0 & W_u \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

sendo $P(s)$ a planta generalizada dada por

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_e & -W_e G \\ 0 & W_u \\ I & -G \end{bmatrix}$$

Essa planta $P(s)$ também pode ser representada no espaço de estados como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned}$$

As matrizes que compõem a planta generalizada são utilizadas para o projeto do controlador $\mathcal{H}_2$, o qual minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência que relaciona a saída z à entrada w. Esse controlador é obtido a partir da solução das duas equações algébricas de Riccati, dadas por:

$$(A - B_2R_1^{-1}D_{12}^TC_1)^TX + X(A - B_2R_1^{-1}D_{12}^TC_1)$$
$$- XB_2R_1^{-1}B_2^TX + C_1^T(I - D_{12}R_1^{-1}D_{12}^T)C_1 = 0$$
$$(A - B_1D_{21}^TR_2^{-1}C_2)Y + Y(A - B_1D_{21}^TR_2^{-1}C_2)^T$$
$$- YC_2^TR_2^{-1}C_2Y + B_1(I - D_{21}^TR_2^{-1}D_{21})B_1^T = 0$$

Deve-se notar que as hipóteses para a existência do controlador $\mathcal{H}_2$ ótimo são, segundo [9]: as matrizes D_{11} e D_{22} devem ser zero, o par (A, B_2) deve ser estabilizável, o par (A, C_2) deve ser detectável, as matrizes $R_1 = D_{12}^TD_{12}$ e $R_2 = D_{21}D_{21}^T$ devem ser positivas definidas e as matrizes

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$$

devem ser, respectivamente, de posto cheio de colunas e posto cheio de linhas. Com isso, as soluções das equações de Riccati X e Y são utilizadas nos ganhos F_2 e L_2 dados por:

$$F_2 = -R_1^{-1}(B_2^TX + D_{12}^TC_1)$$
$$L_2 = -(YC_2^T + B_1D_{21}^T)R_2^{-1}$$

Por fim, o controlador $\mathcal{H}_2$ ótimo é dado por

$$K = \begin{bmatrix} A + B_2F_2 + L_2C_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta a simulação do sistema físico. Serão discutidos os desempenhos dos sistemas em malha fechada local e global, bem como as vantagens da estratégia de controle proposta.

Para os resultados numéricos, foram utilizados os valores dos parâmetros do sistema físico (de [3]) dados por:

$$M = 6,5[kg], \qquad m = 1,025[kg]$$
$$l = 0,6[m], \qquad g = 9,81[m/s^2]$$

As funções de ponderação utilizadas foram

$$W_e(s) = \frac{10^4(s + 49,45)(s + 4,55)}{(s + 10^4)(s + 54)(s + 10^{-6})}$$
$$W_u(s) = \frac{6(s + 10)}{s + 10^3}$$

As condições iniciais foram nulas para todos os estados (tanto da planta quanto do controlador) e os pontos de operação selecionados foram

$$\bar{\theta} = [-20, -10, 0, 10, 20]$$
$$\ddot{\bar{\theta}} = [-400, -200, 0, 200, 400]$$

Sistema em malha fechada local

Inicialmente, foi calculada a malha fechada para cada uma das plantas locais, juntamente com seus respectivos controladores, a fim de verificar o desempenho de cada sistema. Um exemplo dessas plantas em malha fechada é dado abaixo, com $\bar{\theta} = -10$ e $\ddot{\bar{\theta}} = -200$.

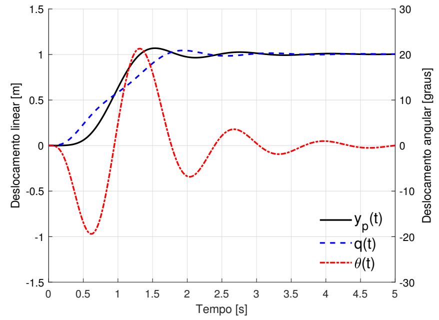

Figura 4: y_p, q e θ do sistema em malha fechada local sujeito a uma entrada degrau.

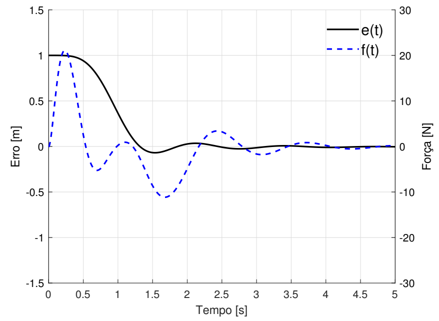

Figura 5: e e f do sistema em malha fechada local sujeito a uma entrada degrau.

Percebe-se das figuras que o deslocamento absoluto horizontal da carga rastreia assintoticamente a trajetória de referência, com um tempo de acomodação de aproximadamente 3 segundos e máximo sobressinal de aproximadamente 6,92%. O esfoço de controle máximo é da ordem de 21 (N). Foi constatado que os sistemas em malha fechada locais apresentam valores de desempenho muito próximos entre si.

Sistema em malha fechada global

O sistema em malha fechada global é composto pela planta não linear representada pela equação (1), pela lei de controle auxiliar dada pela equação (3) e pelo controlador escalonado formado pelo conjunto de controladores locais. Os resultados para essa configuração são apresentados nos gráficos abaixo.

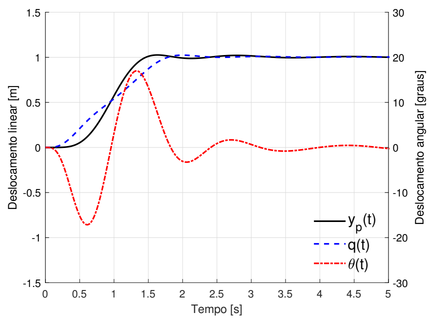

Figura 6: y_p, q e θ do sistema em malha fechada global sujeito a uma entrada degrau.

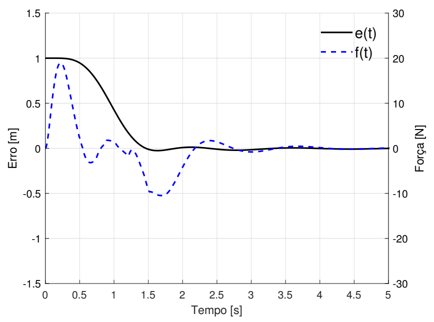

Figura 7: e e f do sistema em malha fechada global sujeito a uma entrada degrau.

Observa-se que o erro de rastreamento se aproxima significativamente de zero, com um máximo sobressinal de aproximadamente 2,5%, um tempo de acomodação inferior a 2 segundos e um esforço de controle menor que 19 (N).

CONCLUSÕES

O controlador escalonado, baseado no problema $\mathcal{H}_2$, demonstrou ser eficiente no controle do *overhead crane*, modelado como um carro-pêndulo. Através desse controlador, foi possível garantir estabilidade e precisão no seguimento da trajetória de referência.

Analisando os resultados da simulação, verificou-se que o deslocamento absoluto horizontal da carga rastreou a trajetória de referência de forma assintótica, apresentando um bom desempenho.

Em suma, o controlador escalonado $\mathcal{H}_2$ é uma abordagem viável e eficaz para o controle do *overhead crane*, proporcionando um desempenho satisfatório.

Futuras investigações podem concentrar-se na otimização do controlador e na exploração de outras técnicas de controle avançado, buscando aprimorar ainda mais o desempenho do sistema.

BIBLIOGRAFIA

Referências

[1] AUERNIG, J. W.; TROGER, H. **Time Optimal-Control of Overhead Cranes with Hoisting of The Load**. Automatica, n. 4, v. 23, p. 437-447, 1987.

[2] DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. **State-Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problems**. IEEE Transactions on Automatic Control, n. 8, v. 34, p. 831-847, 1989.

[3] FANG, Y.; MA, B.; WANG, P.; ZHANG, X. **A Motion Planning-Based Adaptive Control Method for an Underactuated Crane System**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, n. 1, v. 20, p. 241-248, 2012.

[4] HAUSER, J.; SACCON, A.; FREZZA, R. **On the Driven Inverted Pendulum**. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, p. 6176-6180, 2005.

[5] LEITH, D. J.; LEITHEAD, W. E. **Survey of gain-scheduling analysis and design**. International Journal of Control, n. 11, v.73, p. 1001-1025, 2000.

[6] RUGH, W.; SHAMMA, J. **Research on gain scheduling**. Automatica, n. 10, v. 36, p. 1401-1425, 2000.

[7] SINGHOSE, W.; PORTER, L.; KENISON, M.; KRIIKKU, E. **Effects of hoisting on the input shaping control of gantry cranes**. Control Engineering Practice, n. 10, v. 8, p. 1159-1165, 2000.

[8] STOORVOGEL, A. A. **The Robust $\mathcal{H}_2$ Control Problem: A Worst-Case Design**. IEEE Transactions on Automatic Control, n. 9, v. 38, p. 1358-1370, 1993.

[9] ZHOU, K.; DOYLE, J. **Essentials of Robust Control**. Upper Saddle River, USA, Prentice-Hall, 1998.