



# FLEXIBILIDADE DE MÁQUINAS EM PROBLEMAS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES

**Palavras-Chave:** PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES, FLEXIBILIDADE DE MÁQUINAS, EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

**Autores:**

**GIOVANNA BRIENE DE SANTANA LEITE, FCA - UNICAMP**

**Prof. Dr. DIEGO JACINTO FIOROTTO, FCA - UNICAMP**

## INTRODUÇÃO:

Ao estudar-se processos industriais, nos últimos tempos, houve um crescente interesse em criar modelos com aspectos mais condizentes com o que ocorre na prática. Dessa forma, o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas aparece em diversas aplicações industriais, visto que a flexibilidade de máquinas pode ser importante em um ambiente de planejamento determinístico de curto prazo, ou seja, a decisão de configuração de flexibilidade torna-se uma decisão de nível tático/operacional que é tomada no início de um período de produção quando a demanda no horizonte de planejamento é conhecida, permanecendo então fixa para o horizonte de planejamento atual. Como resultado, foram desenvolvidas pesquisas a fim de estudar diferentes tipos de flexibilidade aplicadas em alguns problemas.

Em suma, a literatura sobre flexibilidade aborda várias questões que vão desde as decisões estratégicas de planejamento de capacidade (Fine e Freund, 1990 e Jordan e Graves, 1995) até detalhadas questões de operações de número de troca de ferramentas (Tang e Denardo, 1988). No que diz respeito ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com uma quantidade limitada de flexibilidade de máquinas, mesmo sendo um modelo mais realista em comparação com a flexibilidade total, utilizada como suposição padrão, foram encontrados apenas dois trabalhos que consideram essa situação, sendo eles o de Jans and Degraeve (2004) e o de Xiao et al. (2015).

Um estudo mais recente de Fiorotto et al. (2018) apresentou o primeiro estudo a respeito de flexibilidade de máquinas e

princípio da cadeia para o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas idênticas em sistemas balanceados, ou seja, o número de máquinas e itens no sistema de produção são iguais.

Nesse contexto, o presente projeto investigou os diversos conceitos relacionados à flexibilidade em problemas de dimensionamento de lotes, estudando diferentes configurações e os benefícios da flexibilidade de máquinas em sistemas balanceados.

## METODOLOGIA:

### DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO

#### MATEMÁTICA:

A Figura (1) ilustra o problema de dimensionamento de lotes com máquinas flexíveis considerando três configurações diferentes de flexibilidade para um problema de 4 itens que devem ser produzidos em 4 máquinas diferentes. O primeiro caso (caso (a)), é o caso dedicado. O segundo caso (caso (b)), corresponde à regra da cadeia, onde, em relação ao caso dedicado, a quantidade de ligações adicionais corresponde à quantidade de itens presentes no problema. Por fim, no caso (c) têm-se a flexibilidade total do sistema, onde todas as máquinas possuem a capacidade de produzir todos os itens.

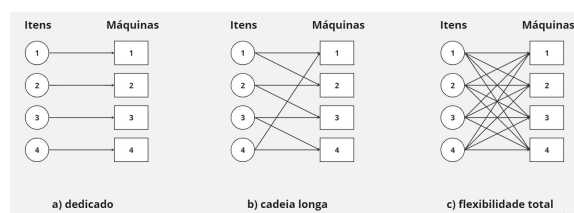


Figura 1: Configurações de flexibilidade. Fonte própria.

Para desenvolvimento do projeto, será utilizada a formulação matemática apresentada por Fiorotto et al. (2018).

Dessa forma, foram considerados os seguintes conjuntos e parâmetros de entrada:

### 1. Dimensionamento de lote em máquinas paralelas com flexibilidade limitada:

$I = \{1, \dots, n\}$ : conjunto de itens;

$J = \{1, \dots, r\}$ : conjunto de máquinas;

$T = \{1, \dots, m\}$ : conjunto de períodos;

$I_j$ : conjunto de itens  $i$  que podem ser produzidos na máquina  $j$ ;

$J_i$ : conjunto de máquinas  $j$  que podem produzir o item  $i$ ;

$d_{it}$ : demanda do item  $i$  no período  $t$ ;

$sd_{it\tau}$ : a soma da demanda por item  $i$ , do período  $t$  até o período  $\tau$  ( $\tau \geq 1$ );

$hc_{it}$ : custo de estoque unitário do item  $i$  no período  $t$ ;

$bc_{it}$ : custo unitário de atraso do item  $i$  no período  $t$ ;

$sc_{ijt}$ : custo de preparação para o item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ;

$vc_{ijt}$ : custo de produção para o item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ;

$st_{ijt}$ : tempo de preparação do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ;

$vt_{ijt}$ : tempo de produção do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ ;

$Cap_{jt}$ : capacidade (em unidades de tempo) da máquina  $j$  no período  $t$ .

As variáveis de decisão são definidas como:

$x_{ijt}$ : quantidade (tamanho do lote) do item  $i$  a ser produzida na máquina  $j$  no período  $t$ ;

$y_{ijt}$ : variável de configuração binária;  $y_{ij} = 1$  se a máquina  $j$  estiver configurada para a produção do item  $i$  no período  $t$ , caso contrário,  $y_{ij} = 0$ ;

$s_{it}$ : estoque do item  $i$  no final do período  $t$ ;

$b_{it}$ : atraso do item  $i$  no final do período  $t$ .

A formulação matemática é definida como:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{ijt} y_{ijt} + vc_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (hc_{it} s_{it} + bc_{it} b_{it}) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$s_{i,t-1} + b_{it} + \sum_{j \in J_i} x_{ijt} = d_{it} + s_{it} + b_{i,t-1}, \forall i \in I, t \in T \quad (2)$$

$$x_{ijt} \leq \min\{(Cap_{jt} - st_{ijt})/vt_{ijt}, sd_{i1m}\} y_{ijt}, \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I_j} (st_{ijt} y_{ijt} + vt_{ijt} x_{ijt}) \leq Cap_{jt}, \forall j \in J, t \in T \quad (4)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, x_{ijt} \geq 0, \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (5)$$

$$s_{it} \geq 0, s_{i0} = 0, s_{im} = 0, b_{it} \geq 0, b_{i0} = 0, \forall i \in I, t \in T \quad (6)$$

Em suma, a função objetivo (1) minimiza os custos totais de produção, preparação, estoque e atraso. As restrições (2) asseguram o equilíbrio dos estoques em cada período, sendo que a demanda não atendida no prazo estipulado pode ser atrasada. A restrição (3) diz respeito à configuração da máquina, enquanto a (4) diz respeito aos limites de capacidade. Por fim, as restrições (5) e (6) definem os domínios das variáveis.

### 2. Dimensionamento de lote em máquinas paralelas configuradas como regra da cadeia:

Em relação à formulação anterior, são adicionados novos parâmetros e variáveis, de forma que:

$K = \{1, \dots, n\}$ : conjunto de posição dos itens;

$K_j$ : conjunto de posições ligadas à máquina  $j$ ;

$w_{ij}$ : variável binária responsável por indicar se o item  $i$  está atribuído ou não à posição  $j$ .

Assim, a formulação matemática encontra-se da seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{ijt} y_{ijt} + vc_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (hc_{it} s_{it} + bc_{it} b_{it}) \quad (7)$$

Sujeito a:

$$s_{i,t-1} + b_{it} + \sum_{j \in J_i} x_{ijt} = d_{it} + s_{it} + b_{i,t-1}, \forall i \in I, t \in T \quad (8)$$

$$x_{ijt} \leq \min\{(Cap_{jt} - st_{ijt})/vt_{ijt}, sd_{i1m}\} y_{ijt}, \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I_j} (st_{ijt} y_{ijt} + vt_{ijt} x_{ijt}) \leq Cap_{jt}, \quad \forall j \in J, t \in T \quad (10)$$

$$y_{ij} \leq \sum_{k \in K_j} w_{ik}, \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{j \in K} w_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ij} = 1, \quad \forall j \in K \quad (13)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, x_{ijt} \geq 0, b_{it} \geq 0, b_{i0} = 0, \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (14)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\}, s_{it} \geq 0, s_{i0} = 0, s_{im} = 0, \quad \forall j \in K, i \in I, t \in T \quad (15)$$

A função objetivo (7) e as restrições (8), (9) e (10) são iguais à formulação anterior. As restrições (11) determinam a configuração da regra da cadeia. Para isso, fixa-se o conjunto  $K_j$  de forma que:

$$K_j = \{1, n\}, \text{ se } j = 1;$$

$$K_j = \{j - 1, j\}, \quad \forall j \in J.$$

Dessa forma, o modelo encontra a melhor entre todas as configurações possíveis para a regra da cadeia. Por fim, as restrições (12) e (13) são restrições de atribuição enquanto as restrições (14) e (15) definem os domínios das variáveis.

### 3. Dimensionamento de lote em máquinas paralelas com flexibilidade como variável de decisão:

Em relação às formulações anteriores, os seguintes parâmetros foram adicionados:

$fc_{ij}$ : custo de investimento em flexibilidade para produzir o item  $i$  na máquina  $j$ ;

$Fmax$ : orçamento total para investir em flexibilidade.

Por sua vez, a seguinte variável de decisão é adicionada:

$z_{ij}$ : variável binária que indica se a máquina  $j$  pode produzir ou não o item  $i$ .

A formulação matemática é constituída pela função objetivo (7) e pelas restrições (8), (9), (10) e (15). Além delas, as restrições abaixo foram adicionadas:

$$y_{ijt} \leq z_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (16)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} fc_{ij} z_{ij} \leq Fmax \quad (17)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, z_{ij} \in \{0, 1\}, x_{ijt} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (18)$$

As restrições (16) asseguram que uma máquina pode ser configurada para produzir determinado item em determinado período apenas se a máquina tiver a flexibilidade para produzi-lo. A restrição (17) limita o orçamento de investimento em flexibilidade. Por fim, a formulação foi modelada considerando a possibilidade de não ter toda a demanda satisfeita. Caso contrário, o resultado poderia levar a várias instâncias inviáveis.

### GERAÇÃO DE DADOS E TESTES COMPUTACIONAIS:

A geração de dados para os testes computacionais foi feita assim como em Fiorotto et al. (2018), a partir de uma adaptação do conjunto de dados propostos em Trigueiro et al. (1989).

Os conjuntos utilizados foram o conjunto G51 - G55, que consiste em 5 instâncias com 12 itens e 15 períodos, e o conjunto G56 - G60, que consiste em 5 instâncias com 24 itens e 15 períodos. Para cada instância, foram criados problemas de máquinas paralelas, ou seja, as capacidades são exatamente iguais para cada máquina e o tempo de preparação e de produção e os custos de configuração são os mesmos para todos os itens em cada máquina. O custo de atraso para cada item foi definido como 300. O nível de capacidade foi definido como 1456 para G51 - G55 e 2912 para G56 - G60. A capacidade para a caixa da máquina paralela varia entre 40 e 150, com passo de 10.

Os testes foram realizados a partir da Concert Technology e do solver CPLEX 12.6, modelados utilizando a linguagem de programação C++. Para isso, foi utilizado um computador com 2 processadores Intel(R) Xeon(R) X5675, 3.07 GHz com 96 GB de RAM e sistema operacional Linux. O tempo computacional para cada instância foi definido como 3 horas (10800 segundos).

### RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Nas Tabelas 1 e 2, foram considerados diferentes níveis de capacidade. As colunas LMS e UC são referentes ao limite superior médio e utilização de capacidade, respectivamente. Os limites superiores foram encontrados pela formulação com máquinas 100% dedicadas, sendo os

demais valores calculados a partir disso. Para o caso da regra da cadeia, foram geradas 10 configurações diferentes. O valor contido nas tabelas é a média dessas configurações.

Para os casos da flexibilidade como variável de decisão, foram utilizados os dois modelos propostos em Fiorotto et

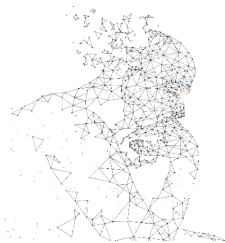
al. (2018). No primeiro ( $F_{\text{máx}} = n + n/2$ ), o modelo utiliza apenas metade das conexões necessárias para a construção de uma regra da cadeia. Por sua vez, no segundo ( $F_{\text{máx}} = 2n$ ) o modelo utiliza a quantidade de conexões necessárias para a formação de uma regra da cadeia

Itens	Capacidade	Dedicado		Regra da Cadeia		Fmáx = n + n/2		Fmáx = 2n		Total	
		LSM	UC	LSM	UC	LSM	UC	LSM	UC	LSM	UC
12	140	100	67,6	100	67,6	100	67,6	100	67,6	100	67,6
	120	100	78,9	98,9	78,9	98,8	78,9	98,9	78,9	98,8	78,9
	100	100	94,1	31	94,7	33	94,7	31,3	94,7	30,7	94,7
	80	100	100	91	100	92	100	90,9	100	90,7	100
	60	100	100	98,9	100	98,8	100	98,8	100	98,8	100
	40	100	100	99,7	100	99,6	100	99,6	100	99,6	100
Média		100	88,5	88,4	88,6	88,9	88,6	88,4	88,6	88,3	88,6
24	140	100	66,4	100	66,4	107,6	66,4	142,7	66,4	100	66,4
	120	100	77,5	99,7	77,5	195,3	77,2	214,3	77,3	99,7	77,5
	100	100	92,5	29	93	48,7	92,8	69,3	92,5	28,7	93
	80	100	100	91	100	93,3	100	90,8	100	90,3	100
	60	100	100	98,9	100	99,2	100	98,7	100	98,7	100
	40	100	100	99,7	100	99,6	100	99,6	100	99,6	100
Média		100	87,7	86,8	87,9	107,4	87,8	117,6	87,8	86,5	87,9

Tabela 1: Comparação de LMS e UC para diferentes configurações. Fonte própria.

Itens	Capacidade	Dedicado		Regra da Cadeia		Fmáx = n + n/2		Fmáx = 2n		Total	
		Gap	T(s)	Gap	T(s)	Gap	T(s)	Gap	T(s)	Gap	T(s)
12	140	0	0,15	0,4	6161,1	2	10800	2	5343,5	0,2	5343,5
	120	0	0,07	0	700,6	0,7	10800	0,8	162,7	0	162,7
	100	0	0,04	0,5	9588,3	6,5	10800	3,2	10800	0,8	10800
	80	0	0,03	0	2,8	1,2	10800	0,2	338	0	338
	60	0	0,02	0	0,03	0,1	3637,7	0	0,18	0	0,18
	40	0	0,02	0	0,03	0	11,7	0	0,1	0	0,1
Média		0	0,06	0,1	2846,8	1,7	8269,3	1	2623,7	0,1	2623,7
24	140	0	0,31	0,4	10800	8,7	10800	21,7	10800	0,6	10800
	120	0	0,19	0,2	6721,1	20,2	10800	23,8	8943,1	0,3	8943,1
	100	0	0,12	0,6	10628,1	41,2	10800	30,9	10800	0,9	10800
	80	0	0,09	0	3,7	3,1	10800	0,7	1318,4	0	1318,4
	60	0	0,09	0	0,11	0,6	10800	0,1	3,1	0	3,1
	40	0	0,08	0	0,14	0	572,5	0	0,55	0	0,55
Média		0	0,17	0,3	5339,2	14,7	9872,1	14	5903,1	0,4	5903,1

Tabela 2: Comparação de gap e tempo de CPU para diferentes configurações. Fonte própria.



A partir da Tabela 1, nota-se que o valor da flexibilidade depende do nível de capacidade, sendo maior para níveis médios de capacidade.

Os valores ótimos do modelo ( $F_{\max} = 2n$ ) são teoricamente iguais ou até mesmo melhores que os da regra da cadeia. Quando testados com altos níveis de capacidade, os resultados desse mesmo modelo fornecem valores de limites superiores médios piores que os da regra da cadeia e tem uma grande lacuna de otimalidade, principalmente para o caso com 24 itens.

Ao ser comparado com o modelo com total flexibilidade, o modelo de regra da cadeia apresenta resultados muito semelhantes.

Por sua vez, os resultados obtidos com o modelo que considera a flexibilidade como variável de decisão utilizando apenas metade das conexões para capacidades baixas e muito altas são bons, assim como os da regra da cadeia para o caso de 12 itens, mas não para o de 24 itens, visto que o mesmo apresenta uma lacuna de otimalidade muito grande.

Futuramente, pretende-se realizar testes considerando heterogeneidades em relação ao atraso e demanda, a fim de comparação.

## BIBLIOGRAFIA:

- C. Fine, R. Freund, Optimal investment in product-flexible manufacturing capacity. *Management Sci.*, 36 (1990), 449–466.
- D. J. Fiorotto, S. A. de Araujo, Reformulation and a lagrangian heuristic for lot sizing problem on parallel machines. *Annals of Operations Research*, 217 (2014), 213–231.
- D. J. Fiorotto, S. A. de Araujo, R. Jans, Hybrid methods for lot sizing on parallel machines. *Computers & Operations Research* 217 (2015), 136–148.
- D. J. Fiorotto, R. Jans, S. A. de Araujo, Process flexibility and the chaining principle in lot sizing problems. *International Journal of Production Economics* 204 (2018), 1–19.
- S. C. Graves, B. T. Tomlin, Process flexibility in supply chains. *Management Science*, 49(7) (2003), 907–919.
- R. Jans, Z. Degraeve, Improved lower bounds for capacitated lot sizing problem with setup time. *Operation Research Letters*, 32 (2004), 185–195.
- R. Jans, Solving lot-sizing problems on parallel identical machines using symmetry breaking constraints. *INFORMS Journal on Computing*, 21 (2009), 123–136.
- C. Johnzén, S. Dauzère-Péres, P. Vialletelle, Flexibility measures for qualification management in wafer fabs. *Production Planning & Control*, 22(1) (2011), 81–90.
- W. Jordan, S. Graves, Principles of the Benefits of Manufacturing Process Flexibility. *Management Sci.*, 41 (1995), 577–594.
- C. Tang, E. Denardo, Models arising from a flexible manufacturing machine, part I: minimization of the number of tool switches. *Operational Research*, 36 (1988), 767–777.
- F. M. B. Toledo, V. A. Armentano, A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 175 (2006), 1070–1083.
- J. Xiao, H. Yang, C. Zhang, L. Zheng, J. N.D. Gupta, A hybrid Lagrangian-simulated annealing-based heuristic for the parallel-machine capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup times. *Computers & Operations Research*, 63 (2015), 72–82.