XXXI Congresso de Iniciação Científica Unicamp 2023

Singularidades em Relatividade Geral

Singularidades, Teoremas da Singularidade de Penrose-Hawking, Gravitação

Matheus De Oliveira Gomes, IFGW - UNICAMP
Prof.Dr.João Paulo Pitelli Manoel, IMECC - UNICAMP

1 Introdução

A Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein no início do século XX, é uma das mais bem-sucedidas, e conhecidas, teorias da física moderna, sendo uma teoria de campos clássica que descreve a gravidade como um efeito direto da curvatura do espaço-tempo, devido à presença de matéria e energia.

No entanto, existem regiões no espaço-tempo nas quais as equações de campo perdem sentido físico; deixando de proporcionar uma descrição acurada das interações gravitacionais. A estas regiões dá-se o nome de singularidades, e comumente são descritas a partir de geodésicas incompletas, ou um valor infinito ao escalar de curvatura. A natureza e significado de singularidades em Relatividade Geral é um tópico de pesquisa corrente.

Um tópico atual e indispensável ao entendimento de singularidades são os Teoremas da Singularidade de Penrose-Hawking. Os teoremas estabelecem condições gerais sob as quais a formação de singularidades se torna inevitável. Claramente, fornecem um arcabouço matemático sólido para analisar e prever a existência de singularidades em RG, permitindo que melhor se investique as consequências físicas e cosmológicas da existência de singularidades.

Ademais, abordaremos o Colapso de Oppenheimer-Snyder, um fenômeno dinâmico que descreve o colapso gravitacional de uma massa até a formação de um buraco negro.

2 Desenvolvimento

Em física, o conceito de *causalidade* mostra-se como um dos mais importantes à ciência, e é fundamental ao estudo de singularidades. Como o nome supõe, é, grosso modo, a relação física entre o conjunto de causas que precedem um evento, e os efeitos destas causas, que confluem à ocorrência do evento. Em Relatividade Especial, como é intuitivo supor, causalidade é definida através do cone de luz de um dado evento. Particularmente, entende-se por Causalidade o fato de que um efeito não pode suceder uma causa que não esteja no cone de luz passado do evento.

Similarmente, uma causa não pode preceder um efeito que não esteja no cone de luz futuro deste evento:

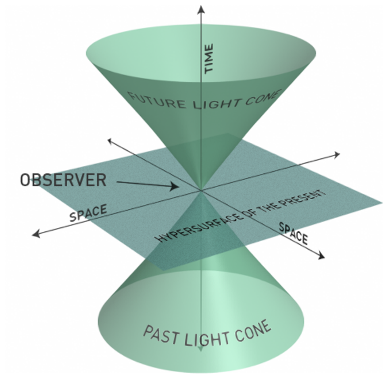

Figure 1: Cone de Luz de um Evento.

Esta sentença segue válida em RG, com a relevante diferença de que relações causais entre pontos de um espaço-tempo curvo são, globalmente, consideravelmente mais complicadas, devido à topologia e singularidades, em oposição a estrutura causal simples que tem-se num espaço-tempo de Minkowski. Relembrando, o comportamento de matéria e energia na presença de curvatura é dada pelas equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \tag{1}$$

Particularmente, a estrutura causal na presença de curvatura se dá através da conexão de pares de pontos por curvas suaves, normalmente em sua forma paramétrica $x^\mu(s)$, onde x^μ são coordenadas locais e s, um parâmetro. As relações causais são obtidas através da imposição de condições nos vetores tangentes às curvas.

O que há de se extrair de mais importante na discussão sobre causalidade são Espaços-Tempo Globalmente Hiperbólicos *(ETGH)*. Estes desempenham um papel relevante em RG, pois fornecem uma noção bem-definida de problemas de Cauchy neste contexto. Isto é, se tivermos informações iniciais adequadas em uma hipersuperfície de Cauchy, as soluções das Equações de Campo são unicamente determinadas e se estendem por todo o espaço-tempo. De fato, sua relevância física condensa-se no fato de que estes são a classe de espaço-tempo que mais possuem significado físico e concreto. Todo o passado, e futuro do universo num *ETGH* pode ser previsto, ou retrodito, a partir de informações em um instante de tempo em uma hipersuperfície de Cauchy, a partir das respectivas equações dinâmicas aplicáveis. Isto é, sem hiperbolicidade global, uma gama completa de informações em um determinado instante de tempo seria insuficiente para determinar o que ocorre no universo neste espaço-tempo.

Exemplificando, a hipersuperfície $t = 0$ no espaço-tempo de Minkowski é uma hipersuperfície de valor inicial, e o espaço-tempo de Minkowski é, trivialmente, globalmente hiperbólico. No entanto, omitindo um ponto r de um espaço-tempo globalmente hiperbólico dá-nos um espaço-tempo que não é globalmente hiperbólico:

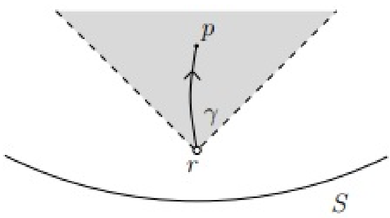

Figure 2: S é uma hipersuperfície em um espaço-tempo que não é globalmente hiperbólico porque um ponto r no futuro de S foi removido. Informações iniciais em S não são suficientes para prever o que será observado em um ponto p que está no futuro de r.

Também importante ao analisar os Teoremas da Singularidade é a Equação de Raychaudhuri. Esta é uma equação diferencial que descreve a expansão, cisalhamento e vorticidade de uma família de congruências geodésicas. Possui a forma[1]:

$$X \cdot \theta = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \tag{2}$$

Onde, θ, σ, ω representam a expansão, cisalhamento e vorticidade, respectivamente. Uma congruência de curvas, basicamente, é um conjunto de curvas no qual os vetores tangente de todas curvas possuem a mesma direção, num ponto sobre o qual as mesmas passam.

A equação é fundamental para entender o comportamento de um colapso gravitacional, e, consequentemente, a formação de singularidades, visto que, grosso modo, é uma equação que expressa o comportamento de geodésicas na presença de gravidade. Explicitamente, dado um espaço-tempo que admita uma superfície aprisionada e que satisfaça a condição de energia forte[1], a Equação de Raychaudhuri implica uma convergência de geodésicas, resultando na formação de uma singularidade.

Teorema 2.1: Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico satisfazendo a condição de energia forte, e suponha que a expansão da congruência geodésicas tipo-tempo apontando ao futuro ortogonais a uma hipersuperfície de Cauchy S satisfaça $\theta \leq \theta_0 < 0$. Sob essas condições, (M, g) é singular.

Este é o Teorema da Singularidade de Hawking. Por singular, quer-se dizer que o espaço-tempo é geodesicamente incompleto. Basicamente, o teorema diz-nos que; dadas condições palpáveis sobre o espaço-tempo (Hiperbolicidade Global e Condição de Energia Forte), e que a expansão da congruência está "contraindo", sem ser nula, temos que a formação de uma singularidade é inevitável.

Teorema 2.2: Seja (M, g) um espaço-tempo conexo e globalmente hiperbólico contendo uma hipersuperfície de Cauchy não-compacta S, satisfazendo a condição de energia nula.[2] Se S conter uma superfície aprisionada Σ, (M, g) é singular.

Este é o Teorema da Singularidade de Penrose. Por conexa, entende-se que não existem regiões disjuntas no espaço-tempo; e por não compacta, interpreta-se que a superfície não possui um volume ou área superficial finitos. De fato [2], um espaço-tempo que seja assintótico (no infinito espacial) ao espaço-tempo de Minkowski só pode admitir uma hipersuperfície de Cauchy que não seja compacta. Com isso, o Teorema de Penrose se aplica a qualquer espaço-tempo assintoticamente não-curvo e globalmente hiperbólico.

Exemplificando, a primeira, e mais conhecida, solução das equações de campo é a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{3}$$

A região $r < 2M$ na solução de Schwarzschild, como $R_{\mu\nu} = 0$, é globalmente hiperbólica e satisfaz a condição de energia nula. Como r é uma função tempo, deve crescer ao longo de qualquer geodésica nula apontando ao futuro, e, assim, qualquer esfera Σ com (t, r) constante deve ser anti-aprisionada. Toda hipersuperfície de Cauchy será difemeomorfa a $\mathbb{R} \times S^2$, e portanto, não será compacta. Com isso, concluímos através do Teorema 2.2 que a solução de Schwarzschild é singular ao passado de Σ.

Finalizando, o Colapso de Oppenheimer-Snyder é uma solução das Equações de Campo de Einstein que descreve uma nuvem esférica de poeira colapsando à um buraco negro. A geometria interna do buraco negro formado é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que descreve um universo homogêneo, isotrópico, expansivel e conexo por caminhos:

$$g = -d\tau^2 + a^2(\tau)[d\sigma^2 + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2)] \tag{4}$$

[1] A Condição de Energia Forte é a condição de que, em termos simples, a densidade de energia registrada por um observador se movendo sobre uma curva tipo-tempo seja maior ou igual a zero. Isto é, $T_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0$, onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de stress-energia covariante.

[2] A condição de Energia nula estabelece que a densidade de energia registrada por um observador movendo-se sobre uma geodésica nula deve ser maior ou igual ao zero; i.e $T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu \geq 0$.

O tensor de Energia-Momento por sua vez, é o de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \tag{5}$$

U^μ sendo a quadrivelocidade do fluido e p, ρ, a pressão e densidade de energia, respectivamente. Analisando-as através de uma equação de estado fornece uma análise completa de $T_{\mu\nu}$, e, assim, é possível estudar a dinâmica do colapso gravitacional resolvendo as equações de campo para (4) e (5), obtendo uma descrição da evolução da curvatura do espaço-tempo à medida que o colapso gravitacional se desenvolve, e como eventualmente um horizonte de eventos se forma, dando origem a um buraco negro.

Resumindo, o colapso de Oppenheimer-Snyder mostra, de modo geral, como um colapso gravitacional continuado gera um buraco negro.

3 Conclusão

Os Teoremas da Singularidade de Penrose-Hawking são um desenvolvimento atual, e central no estudo de Cosmologia, particularmente, singularidades. Ainda que este seja um tópico de contínua discussão e ponderamento, os teoremas demonstram, elegantemente, como singularidades são previsões diretas e categóricas da teoria da Relatividade Geral.

Os uso e importância desses trabalhos são robustos, e seu conteúdo é substancial para qualquer discussão séria sobre singularidades em Relatividade Geral, fazendo com que sejam material indispensável a um estudo aprofundado de RG, e, consequentemente, Cosmologia como um todo.

References

[1] Jose Natário. *An Introduction to Mathematical Relativity.* Springer - Latin American Mathematics Series – UFSCar subseries.

[2] Edward Witten - *"Light rays, singularities, and all that"*. Rev. Mod. Phys. 92, 045004, 2020.

[3] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry.* Cambridge University Press, 2019.

[4] R. M. Wald. General relativity. University of Chicago Press, Chicago, 1984.