As Interações entre Neutrinos e Matéria em Supernovas no Formalismo da Matriz Densidade

Orientador: Pedro Cunha de Holanda, IFGW- UNICAMP
Aluna: Bianca Bulhões Martins, IFGW- UNICAMP

Julho de 2023

Palavras Chave: Neutrinos de supernovas, Oscilação de neutrinos, Matriz densidade

1 Introdução

Estrelas são astros mantidos pela força gravitacional, cujos interiores participam de reações nucleares que emitem energia. Por esse motivo, a exaustão de seu combustível termonuclear ou o desequilíbrio dinâmico das forças que atuam sobre a estrela podem resultar em sua morte [4]. Em alguns casos, a formação de um remanescente ocorre concomitantemente à explosão de uma supernova, isto é, à ejeção de matéria e à liberação de energia da estrela, que enriquecem o meio interestelar com neutrinos e novos elementos [6].

Supernovas, no entanto, podem ser de diferentes tipos a depender de sua composição espectral, do astro progenitor e dos fatores que levam à sua morte. Estrelas massivas, com massas entre $10M_\odot$ e $100M_\odot$ [6], morrem por colapso gravitacional após a exaustão da fusão de seu núcleo de ferro e o desbalanceamento das forças envolvidas, e podem ser do tipo Ib, Ic ou II [4]. Enquanto as primeiras têm pouco ou nenhum hidrogênio em seu espectro, devido à perda de massa da estrela e ejeção do envelope, as segundas também não apresentam hélio, mas as do tipo II possuem ambos [4].

Nesse sentido, embora haja registros da observação óptica de supernovas desde 1054 [9], foi apenas a partir de detecções realizadas em 1987 que a relação delas com neutrinos, partículas fundamentais descobertas no século XX, foi comprovada [9]. A explosão de uma supergigante azul, Sanduleak-69 202 na Grande Nuvem de Magalhães, como uma supernova tipo II foi observada por experimentos de neutrinos, Kamiokande-II [10], Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) [3] e Baksan [2], uma vez que eles detectaram anomalias nos fluxos de neutrinos que os cruzavam.

Descritos pelo Modelo Padrão das Partículas Elementares, os neutrinos são partículas sem massa e com propriedades eletromagnéticas nulas, que podem ser de três tipos, os sabores eletrônico, muônico e tauônico, ν_e, ν_μ e ν_τ, respectivamente [18]. No entanto, foram descobertas as oscilações de sabor dos neutrinos, propostas inicialmente por Pontecorvo e Gribov [8], nas quais a propagação espacial ou temporal dessas partículas pode resultar na mudança de seu sabor. O fenômeno, que pode ocorrer no vácuo, requere que os neutrinos tenham diferenças de massa, ou seja, que esses léptons sejam partículas massivas [18].

Léptons podem interagir via interação nuclear fraca, eletromagnética ou gravitacional [7], porém, os neutrinos apresentam uma seção de choque muito pequena, que implica em uma probabilidade ínfima de reação, tal que eles são capazes de cruzar diversos meios sem sofrer nenhuma interação [11]. Mas isso não se sustenta em meios com densidades muito grandes, como o Sol, outras estrelas ou supernovas [16]. Nesses casos, neutrinos podem sofrer diversas reações com partículas do meio e até entre eles mesmos, o que modifica o fenômeno quântico de conversão de sabor [7].

Sendo assim, o atual trabalho tem como objetivo estudar os vínculos entre os neutrinos e as supernovas e explorar como as interações entre os neutrinos e o meio afetam a sua propagação. Para tanto, a aluna foi introduzida ao formalismo matemático da matriz densidade, no qual deduziu as equações de evolução aos neutrinos para diferentes regimes da matéria e diferentes sabores de neutrinos. Enfim, houve introdução às auto interações entre neutrinos e as possíveis interações foram contextualizadas aos diferentes tipos de supernovas e sua fenomenologia explorada.

2 Metodologia

2.1 O formalismo da matriz de densidade

Para a construção de modelos, é importante notar que um neutrino de interação corresponde à superposição quântica dos auto-estados de massa ν_1, ν_2 e ν_3 [18] e, portanto, a uma combinação linear, conforme a equação 01, em que U é a matriz de mistura e $\alpha = (e, \mu, \tau)$ [7]:

$$|\nu_\alpha >= \sum_{i=1}^{3} U^*_{\alpha i} |\nu_i > \tag{1}$$

Por questões de simplificação, as equações resolvidas analiticamente se pautaram em apenas duas famílias de neutrinos, ν_e e ν_x, tal que $\nu_x = (\nu_\mu, \nu_\tau)$. Isso é possível porque neutrinos do tau e do múon possuem energias semelhantes em supernovas [11]. Então, por 1, temos que [7]:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & e^{i\phi} sin\theta \\ -e^{i\phi} sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

No entanto, como a densidade em um estrela é variável, optou-se por utilizar o formalismo quântico da matriz de densidade, tal que ρ é o operador densidade, representado na base de sabor por [14]:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{ex} \\ \rho_{xe} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Tal que a representação dos elementos da matriz densidade se conectam com o formalismo da equação 1 pela seguinte relação:

$$\rho_{ij} = \sum_{ij} |\nu_i >< \nu_j| \tag{4}$$

Porém, a validade da matriz 3 depende da conservação do número leptônico, sendo necessário supor que, dada a existência de baixos limites superiores para as massas dos neutrinos, sejam válidas velocidades relativísticas aos neutrinos e, portanto, a consideração de neutrinos de mão esquerda (*left-handed*) [13].

Na representação espacial, o campo de neutrinos ($\psi(x)$) é dado pela transformada de Fourier no espaço de momentos, consoante a equação 5, em que $\vec{p}$ é o momento linear dos neutrinos, $u_{\vec{p}}$ e $v_{-\vec{p}}$ são operadores de spin de Dirac, $a_{\vec{p}}$ é o operador quântico de aniquilação e $b^\dagger_{\vec{p}}$ é o operador de criação [15]:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (u_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + v_{-\vec{p}} b^\dagger_{\vec{p}}) exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \tag{5}$$

2.2 A equação de evolução dos neutrinos

A evolução da matriz densidade é dada por [13]:

$$i\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt} = [\Omega^0_{\vec{p}}, \varrho_{\vec{p}}] + [\Omega^{int}_{\vec{p}}, \varrho_{\vec{p}}] + \mathbf{C}[\varrho_{\vec{p}}, \overline{\varrho_{\vec{p}}}] \tag{6}$$

Por um lado, o primeiro comutador está presente em toda evolução de neutrinos, isto é, mesmo no vácuo, pois depende apenas do momento $\vec{p}$ e da matriz de massa $\mathbf{M}^2$ dos neutrinos [15]:

$$\Omega^0_{\vec{p}} = (|\vec{p}|^2 + \mathbf{M}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Porém, o segundo comutador representa o potencial do meio sobre os neutrinos devido à interação entre os léptons [13]. Isso fica evidente por intermédio da equação 8, haja vista que o primeiro colchete envolve o número de densidade dos léptons, L, e a energia dos léptons carregados, E. Por outro lado, o segundo colchete se refere a reações de correntes neutras [13]. Como depende de interações do meio, esse comutador não está presente em oscilações no vácuo.

$$\Omega^{int}_{\vec{p}} = \sqrt(2) G_F [L - \frac{8p}{3m^2_W} E] + \sqrt{2} G_F [\rho - \bar{\rho} - \frac{8p}{3m^2_Z} (U + \bar{U})] \tag{8}$$

Já o terceiro comutador, que envolve o termo de colisão, conforme a equação 9, contabiliza as interações dos neutrinos com o meio e também as auto interações entre os neutrinos [13].

$$\mathbf{C}[\rho_{\vec{p}}, \overline{\rho_{\vec{p}}}] = \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{CC} + \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{NC} + \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{S} \tag{9}$$

Nas equações, $\rho = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\rho_{\vec{p}}$ e $U = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\rho_{\vec{p}}$ [13].

Como diversas interações ocorrem na supernova, diferentes resultados serão encontrados ao se considerar quais delas serão inclusas na equação de evolução da matriz de densidade dos neutrinos. Além disso, podem ou não ser feitas aproximações para encontrar uma solução, como a expansão perturbativa ou o regime adiabático de evolução da estrela.

3 Desenvolvimento e discussão

3.1 Dedução da matriz de densidade no vácuo

À princípio, as equações foram resolvidas analiticamente para o vácuo. Como não há interações dos neutrinos com o meio nem dos neutrinos consigo mesmos, sabemos que $\Omega_{\vec{p}}^{int} = 0$ e $\rho_{\vec{p}} = \overline{\rho_{\vec{p}}}$, resultando na anulação de comutadores. Logo:

$$i\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt} = [\Omega_{\vec{p}}^0, \rho_{\vec{p}}] \Rightarrow \frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt} = -i[\Omega_{\vec{p}}^0, \rho_{\vec{p}}] \tag{10}$$

Haja vista que a matriz densidade pode ser expandida em matrizes de Pauli, isto é, que:

$$\rho_{\vec{p}} = \rho_0 I + \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_3\sigma_3 \tag{11}$$

O comutador também pode ser expresso em matrizes de Pauli por meio do método de expansão de matrizes Hermitianas, o qual considera que [5]:

$$\begin{cases} M = M_\mu \sigma_\mu \\ M_0 = \frac{1}{2}Tr[M] \\ M_i = \frac{1}{2}Tr[M\sigma_i] \end{cases} \tag{12}$$

Para tanto, consideramos a Hamiltoniana no vácuo em um caso 2×2, em que E_i é a energia do neutrino ν_i [7]:

$$\Omega_{\vec{p}}^0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\vec{p}}^0 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)I + \frac{1}{2}(E_1 - E_2)\sigma_3 \tag{14}$$

Então, a equação se torna:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\left[\left(\frac{1}{2}(E_1 + E_2)I + \frac{1}{2}(E_1 - E_2)\sigma_3\right), \rho_0 I + \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 + \rho_3\sigma_3\right] \tag{15}$$

Podemos separá-la em quatro equações de acordo com a matriz de Pauli correspondente e utilizar a propriedade de que $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk\sigma_k}$. Todos os passos da resolução estarão presentes no relatório final. Como solução, obtivemos:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2\theta & \frac{1}{2}e^{i(\frac{\Delta m^2}{2E}t)} \\ \frac{1}{2}e^{-i(\frac{\Delta m^2}{2E}t)} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

Então, calculou-se as probabilidades de sobrevivência dos sabores de neutrinos:

$$P_{\nu_e \to \nu_e} = 1 - sin^2 2\theta sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}x\right) \tag{17}$$

3.2 Efeitos da matéria

Perante a solução 16, é possível fazer uma expansão perturbativa para encontrar uma aproximação à solução da equação 6 para meios em que há matéria. Para tanto, são consideradas as diferentes reações que ocorrem no meio, tal que é originada uma Hamiltoniana de interação, a qual depende dos campos B que atuam no sistema e do campo de neutrinos ψ, que por sua vez dependem do tempo:

$$H_{int}(t) = H_{int}(B(t), \psi(t)) \tag{18}$$

Podemos supor que a Hamiltoniana total depende apenas dos campos individuais, ou seja, das Hamiltonianas individuais que atuam sobre o sistema $[\Omega_{\vec{p}}^{int}(t)]_i$:

$$H_{int}(t) = \sum_i [\Omega_{\vec{p}}^{int}(t)]_i \tag{19}$$

Nesse viés, e supondo que os campos iniciais evoluem livremente, a solução se torna [15]:

$$\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt} = -i[\Omega_{\vec{p}}^0, \rho_{\vec{p}}] + i < [H_{int}^0(t), D_{\vec{p}}^0] > - \int_0^t dt' < [H_{int}^0(t-t'), [H_{int}^0(t), D_{\vec{p}}^0]] > \tag{20}$$

Enquanto o primeiro termo da equação corresponde ao resultado no vácuo, o segundo representa a solução em primeira ordem em um meio, isto é, às reações de *forward scaterring*, ou seja, reações de espalhamento com léptons carregados em que há conservação de momento [15]. É importante perceber que, quando os *forward scaterring* ocorrem entre léptons e neutrinos, essas reações correspondem ao efeito Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) [16], no qual as reações de espalhamento causam pequenas mudanças na amplitude do movimento dos neutrinos [11] e, portanto, diferenças de fase, atuando como um índice de refração [16].

Por outro lado, a integral da equação 20 é a solução perturbativa em segunda ordem e inclui tanto o *forward scaterring* quanto o *non-forward scaterring* (espalhamento sem conservação de momento) para diferentes partículas [15]. Todavia, considerar espalhamentos não conservativos nas contas implica em considerar também o fenômeno da decoerência quântica [15].

Até então, o trabalho considerou o neutrino como uma onda plana [7], porém, para o estudo da decoerência, ele é tratado como um pacote de onda com componentes de momento ligeiramente distintos [17]. Assim, conforme o neutrino se propaga na estrela, ocorre a defasagem entre as componentes do pacote de onda, as quais podem se separar e deixar de interferir. Dessa forma, a mistura se torna incoerente, impossibilitando, à princípio, as oscilações de neutrinos [1].

Em supernovas por colapso do núcleo, os neutrinos se tornariam incoerentes a um raio médio de $10km$ desde a sua produção [12], no entanto, as densidades extremas dão origem a auto interações entre os neutrinos até uma distância radial de cerca $100km$ [1]. Além disso, ocorrem conversões de sabor por ressonância devido ao efeito MSW [16]. Portanto, os sabores dos neutrinos ainda são convertidos.

Se desconsiderarmos os termos de segunda ordem, podemos reescrever a equação de evolução em termos das diferentes categorias de reações que podem ocorrer e afetar os neutrinos, as correntes carregadas (CC), as correntes neutras (NC) e as auto interações (S). Cada uma delas apresenta uma Hamiltoniana correspondente, logo, podemos escrever a variação da matriz densidade como a soma das variações devido à cada tipo de reação, somada à contribuição do vácuo [15]:

$$\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt} = [\Omega_{\vec{p}}^0, \rho_{\vec{p}}] + \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{CC} + \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{NC} + \left(\frac{d\rho_{\vec{p}}}{dt}\right)_{S} \tag{21}$$

No entanto, em cada região da estrela há processos dominantes: no interior da estrela, dominam as auto interações entre os neutrinos, mas, conforme a densidade da estrela diminui, predomina o efeito MSW [11]. Sendo assim, diferentes reações devem ser consideradas na equação de acordo com a região da estrela.

4 Considerações Finais

Embora as equações de neutrinos no formalismo da matriz de densidade tenham sido amplamente estudadas, ainda é necessário aplicá-las para as reações ocorrentes em uma supernova. Espera-se que, ao considerar diferentes reações, a Hamiltoniana do sistema seja alterada e, portanto, encontrar-se-á distintas matrizes de densidade. Para tanto, será dedicado o restante do projeto.

Referências

[1] Akhmedov, E., Kopp, J., and Lindner, M. Collective neutrino oscillations and neutrino wave packets. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2017*, 09 (2017), 017.

[2] Alexeyev, E., Alexeyeva, L., Krivosheina, I., and Volchenko, V. Detection of the neutrino signal from sn 1987a in the lmc using the inr baksan underground scintillation telescope. *Physics Letters B 205*, 2-3 (1988), 209–214.

[3] Bionta, R., Blewitt, G., Bratton, C., Casper, D., Ciocio, A., Claus, R., Cortez, B., Crouch, M., Dye, S., Errede, S., et al. Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987a in the large magellanic cloud. *Physical Review Letters 58*, 14 (1987), 1494.

[4] Carroll, B. W., and Ostlie, D. A. *An introduction to modern astrophysics.* Cambridge University Press, 2017.

[5] de Oliveira, R. L. N., et al. *Análise fenomenológica da descoerência na oscilação de neutrinos.* PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Física Gleb Wataghin, 2019.

[6] Filho, K., and Saraiva, M. *Astronomia e Astrofísica*, vol. 3. Livraria da Física, 2014.

[7] Giunti, C., and Kim, C. W. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics.* Oxford university press, 2007.

[8] Gribov, V., and Pontecorvo, B. Neutrino astronomy and lepton charge. *Physics Letters B 28*, 7 (1969), 493–496.

[9] Grupen, C., Cowan, G., Eidelman, S., and Stroh, T. *Astroparticle physics*, vol. 50. Springer, 2005.

[10] Hirata, K. S., et al. Observation in the Kamiokande-II detector of the neutrino burst from supernova SN1987a. *Phys. Rev. D 38* (Jul 1988), 448–458.

[11] Janka, H.-T. Neutrino emission from supernovae. *arXiv preprint arXiv:1702.08713* (2017).

[12] Kersten, J. Coherence of supernova neutrinos. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements 237* (2013), 342–344.

[13] Lesgourgues, J., Mangano, G., Miele, G., and Pastor, S. *Neutrino cosmology.* Cambridge University Press, 2013.

[14] Mirizzi, A., Tamborra, I., Janka, H., et al. Supernova neutrinos: Production, oscillations and detection. *La Rivista del Nuevo Cimento 39*, 1 (2016), 1–112.

[15] Sigl, G., and Raffelt, G. General kinetic description of relativistic mixed neutrinos. *Nuclear Physics B 406*, 1-2 (1993), 423–451.

[16] Smirnov, A. Y. The MSW effect and matter effects in neutrino oscillations. *Physica Scripta T121* (jan 2005), 57–64.

[17] Torres, F., and Guzzo, M. Wave packet description of neutrino oscillation in a progenitor star supernova environment. *Brazilian journal of physics 37* (2007), 1273–1278.

[18] Valdiviesso, Gustavo do A, G. M. M. Compreendendo a oscilação dos neutrinos. *Revista Brasileira de Ensino de Física.*