

Introdução

O modelo de crédito parcial generalizado (MCPG) pertence à classe de modelos para respostas politômicas graduais da Teoria da Resposta ao Item (TRI), sendo, portanto, apropriado na modelagem de itens cuja resposta está relacionada à algum tipo de escala gradual. A literatura existente em Português sobre o MCPG é bastante escassa, e mesmo a internacional, alguns pontos não têm sido estudado em detalhes como: interpretação dos parâmetros, identificabilidade e avaliação do desempenho de estimadores. Neste sentido, o estudo de tais aspectos é de fundamental importância, contribuindo para uma melhor utilização do MCPG.

Modelo de Crédito Parcial Generalizado

A probabilidade de um indivíduo j , com traço latente θ_j , escolher determinada categoria k do item i é dada por

$$P(Y_{ijk} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{\exp \left[\sum_{v=1}^k D a_{iv} (\theta_j - b_{iv}) \right]}{\sum_{c=1}^m \exp \left[\sum_{v=1}^c D a_{iv} (\theta_j - b_{iv}) \right]}, \quad (1)$$

em que $i = 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, m$.

O parâmetro b_{ik} , $k = 1, \dots, m$, na equação (1), pode ser decomposto como $b_{ik} = b_i - d_k$, no qual

- b_i representa o parâmetro de localização (dificuldade) do item;
- d_k representa o parâmetro de categoria, a dificuldade relativa da categoria k em comparação com as outras categorias;
- Y_{ijk} representa a resposta (binária) do indivíduo j à categoria k do item i ;
- θ_j é o traço latente (proficiência ou habilidade) do j -ésimo indivíduo;
- a_i representa o parâmetro de discriminação do i -ésimo item;
- D é um fator de escala, utiliza-se $D = 1,7$ quando se deseja que a função logística forneça resultados semelhantes ao da ogiva normal;
- $P_{ijk}(\theta_j)$ é chamada de Função de Resposta à Categoria do Item (FRCI).

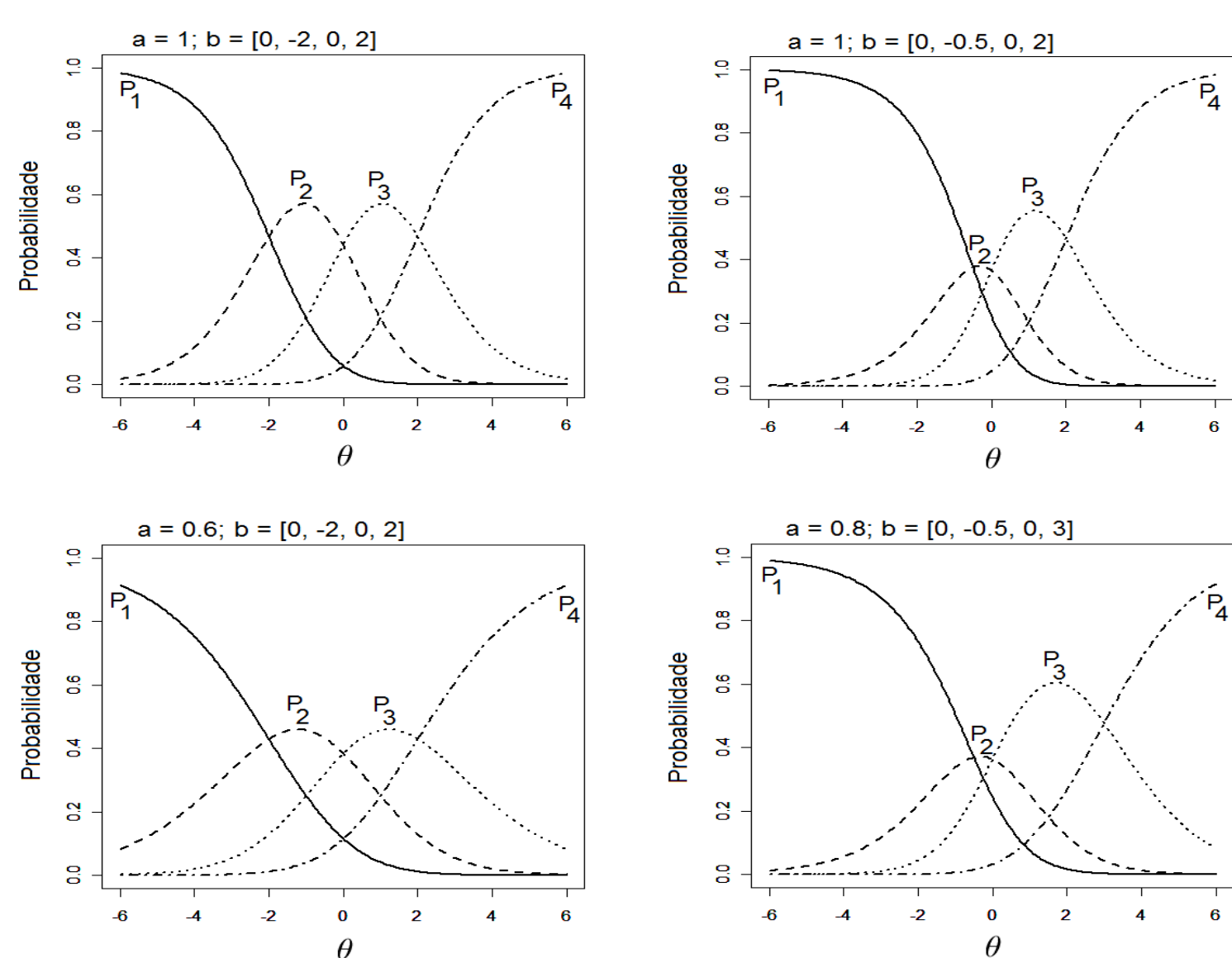


Figure 1: Representação gráfica do MCPG de quatro itens.

Identificabilidade

A existência de identificabilidade é uma condição imprescindível para utilização de um modelo. Sem a mesma, a obtenção e interpretação das estimativas ficam comprometidas. Na TRI, o problema da falta de identificabilidade aparece com frequência. Muitas vezes, é resolvido impondo-se restrições ou nos parâmetros dos itens ou nos traços latentes. No caso do MCPG, devido a estrutura complexa, na maior parte das vezes, é necessário restringir ambas as classes de parâmetros.

A indeterminação entre o conjunto de parâmetros de categoria, d_k , com os parâmetros a_i e b_i e a variável θ_j , pode ser expressa por

$$a_i(\theta_j - b_i + d_k) = \frac{a_i}{s} [s\theta_j - (sb_i - t) + (sd_k - t)],$$

onde s é um fator de escala, e t é um fator de localização, conhecidos.

Visando obter um único conjunto de estimativas para os parâmetros, a restrição, chamada restrição de localização, deve ser imposta à estimação dos parâmetros dos itens. Tal imposição é aplicada para que a média dos parâmetros, dentro de uma escala categórica, seja constante. Uma escolha natural é 0, ou seja

$$\sum_{v=2}^m d_v = 0. \quad (2)$$

Outra proposta, para a eliminação do problema de indeterminação, consiste em atribuir no processo de estimação uma distribuição de probabilidade para o traço latente, em geral com média e variância conhecidos.

Estimação dos Parâmetros dos Itens

O método de estimação dos parâmetros dos itens foi desenvolvido considerando os traços latentes conhecidos, via Máxima Verossimilhança (MV). A fim de solucionar o problema da falta de identificabilidade do modelo, foi imposta a restrição linear (2). No entanto, existem diversas maneiras de incorporá-la no processo de estimação, dentre as quais pode-se destacar

1. Utilizar uma transformação nos parâmetros ζ , de modo a contemplar a restrição (**Processo 1**);
2. "Reescalonar" os parâmetros ao final de cada processo iterativo (**Processo 2**).

Utilizando a segunda abordagem supracitada, definiu-se o **Processo 3** considerando a possibilidade de ignorar a relação entre os parâmetros de discriminação e dificuldade com os parâmetros de categoria, assim, a matriz de Informação de Fisher torna-se bloco diagonal, reduzindo consideravelmente o esforço computacional.

Como as equações de estimação não apresentam solução explícita, utilizou-se o método Escore de Fisher para obtenção das estimativas. Dessa maneira, considere $\hat{\zeta}^{(t)}$ a estimativa de ζ na iteração t , então na iteração $t + 1$ tem-se que

$$\hat{\zeta}^{(t+1)} = \hat{\zeta}^{(t)} + [\mathbf{V}(\hat{\zeta}^{(t)})]^{-1} \mathbf{S}(\hat{\zeta}^{(t)}),$$

em que

$$\mathbf{V}(\hat{\zeta}) = \begin{bmatrix} V_{a_1 a_1} & V_{a_1 b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & V_{a_1 d_2} & \dots & V_{a_1 d_m} \\ V_{a_1 b_1} & V_{b_1 b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & V_{b_1 d_2} & \dots & V_{b_1 d_m} \\ 0 & 0 & V_{a_2 a_2} & V_{a_2 b_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & V_{a_2 d_2} & \dots & V_{a_2 d_m} \\ 0 & 0 & V_{a_2 b_2} & V_{b_2 b_2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & V_{b_2 d_2} & \dots & V_{b_2 d_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & V_{a_h a_h} & V_{a_h b_h} & 0 & 0 & \dots & V_{a_h d_2} & \dots & V_{a_h d_m} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & V_{a_h b_h} & V_{b_h b_h} & 0 & 0 & \dots & V_{b_h d_2} & \dots & V_{b_h d_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & V_{a_l a_l} & V_{a_l b_l} & V_{a_l d_2} & \dots & V_{a_l d_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & V_{a_l b_l} & V_{b_l b_l} & V_{b_l d_2} & \dots & V_{b_l d_m} \\ V_{a_1 d_2} & V_{b_1 d_2} & V_{a_2 d_2} & V_{b_2 d_2} & \dots & \dots & \dots & V_{a_l d_2} & V_{b_l d_2} & V_{d_2 d_2} & \dots & V_{d_2 d_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{a_1 d_m} & V_{b_1 d_m} & V_{a_2 d_m} & V_{b_2 d_m} & \dots & \dots & \dots & V_{a_l d_m} & V_{b_l d_m} & V_{d_2 d_m} & \dots & V_{d_m d_m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}(\hat{\zeta}) = \begin{bmatrix} S(a_1) \\ S(b_1) \\ \vdots \\ S(a_l) \\ S(b_l) \\ S(d_2) \\ \vdots \\ S(d_m) \end{bmatrix}$$

com

$$S(\zeta_i) \equiv \frac{\partial \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i} \quad e \quad V(\zeta_i) \equiv -E \left(\frac{\partial^2 \log L(\zeta)}{\partial \zeta_i' \partial \zeta_i'} \right).$$

No estudo de simulação foram considerados 15 itens, com 4 categorias de resposta $D = (d_2, d_3, d_4) = (-1.5, 0, 1.5)$, com parâmetros de discriminação variando de $[0.4, 1]$ e parâmetro de dificuldade de $[-0.8, 0.8]$. Os traços latentes foram gerados a partir de uma distribuição $N(0, 1)$.

Tabela 1: Resultado da estimação dos parâmetros de categoria

		Parâmetro de Categoria								
		$d_2 = -1.5$			$d_3 = 0$			$d_4 = 1.5$		
		Var*	√EQM	Vício*	Var*	√EQM	Vício*	Var*	√EQM	Vício*
$n = 500$	P1	5.658	0.076	0.341	6.385	0.079	0.217	5.724	0.081	1.103
	P2	5.645	0.074	0.112	2.865	0.054	0.175	5.584	0.073	0.006
	P3	6.765	0.083	0.477	3.909	0.061	0.002	7.472	0.088	0.537
$n = 700$	P1	4.108	0.063	0.026	3.393	0.057	0.001	2.815	0.052	0.015
	P2	5.560	0.073	0.001	4.211	0.063	0.001	4.419	0.065	0.001
	P3	7.088	0.083	0.047	5.808	0.074	0.000	4.383	0.065	0.0439
$n = 10^3$	P1	3.875	0.061	0.077	3.425	0.057	0.027	3.684	0.061	0.196
	P2	3.818	0.063	0.344	2.815	0.054	0.251	1.881	0.042	0.007
	P3	3.190	0.059	0.422	2.600	0.050	0.028	3.139	0.057	0.230

*valores ($\times 10^{-3}$).

Tabela 2: Resultado da estimação do parâmetro de discriminação.

		Discriminação								
		Processo 1			Processo 2			Processo 3		
		$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$	$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$	$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$
Variância*		2.345	1.676	1.145	1.964	1.373	1.016	2.281	1.506	1.031
√EQM		0.049	0.040	0.039	0.044	0.037	0.035	0.048	0.038	0.039
Vício*		0.164	0.053	0.015	0.060	0.043	0.026	0.111	0.044	0.018

*valores ($\times 10^{-3}$).

Tabela 3: Resultado da estimação do parâmetro de dificuldade.

		Dificuldade								
		Processo 1			Processo 2			Processo 3		
		$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$	$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$	$n = 500$	$n = 700$	$n = 10^3$
Variância*		4.496	3.060	2.242	4.981	2.759	2.230	4.644	3.514	2.039
√EQM		0.066	0.055	0.029	0.076	0.061	0.037	0.068	0.059	0.042
Vício*		0.059	0.109	0.156	1.047	1.093	0.884	0.236	0.119	0.056

*valores ($\times 10^{-3}$).

Estimação dos Traços Latentes

A estimação dos traços latentes foi feita pelo método de máxima verossimilhança perfilada (MVP). Neste caso, a expressão para estimativa de θ_j , na iteração $t + 1$ será

$$\hat{\theta}_j^{(t+1)} = \hat{\theta}_j^{(t)} + [V(\hat{\theta}_j^{(t)})]^{-1} S(\hat{\theta}_j^{(t)}),$$

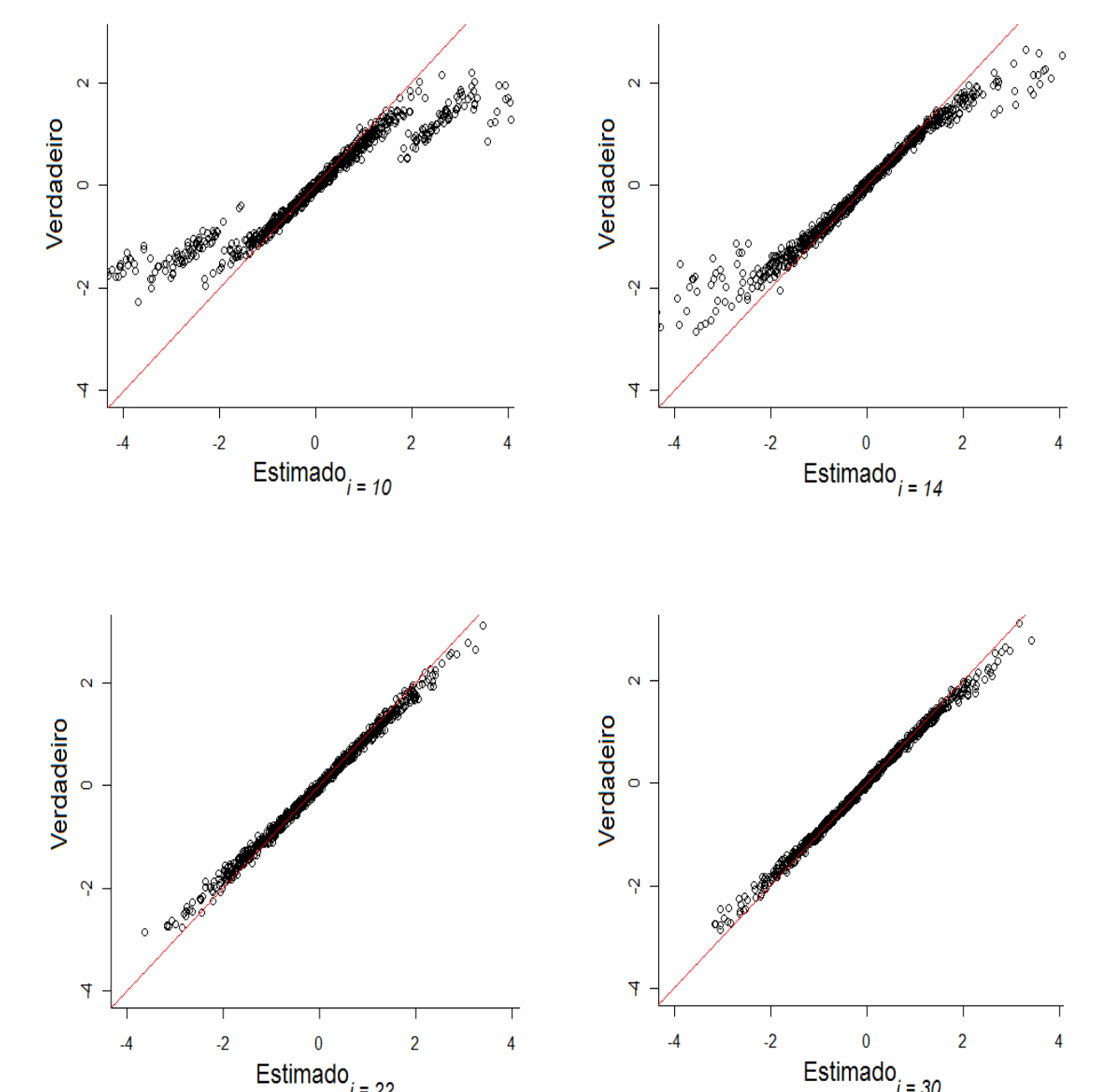
em que

$$S(\theta_j) = \sum_{i=1}^I a_i \sum_{k=1}^m k [y_{ijk} - P_{ijk}(\theta_j)],$$

$$V(\theta_j) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Z_{ijk}^+}{\partial \theta_j} \right) \left(\frac{\partial P_{ijk}}{\partial \theta_j} \right).$$

Tabela 4: Resultado da estimação dos traços latentes

Traço Latente	Estatística			
	Variância	Mediana	√EQM	Vício
Estimado $i=10$	1.860	-0.056	1.395	0.151
Estimado $i=14$	0.253	-0.054	0.508	0.014
Estimado $i=22$	0.171	-0.053	0.423	0.013
Estimado $i=30$	0.125	-0.059	0.361	0.009



Conclusão

Este é um trabalho ainda em andamento. Ainda assim, acreditamos que os resultados obtidos até então são bastante significativos. No que concerne a estimação dos parâmetros dos itens, o **Processo 2** mostrou-se superior aos outros dois, para todo n . Quando o número de respondentes é maior que 10^3 , as observações sugerem que considerar a matriz de Informação de Fisher como sendo bloco diagonal (**Processo 3**) não traz prejuízo às estimativas. Na estimação dos traços latentes, quando $i = 10$ e $i = 14$ é nítido o grande deslocamento do ajuste, principalmente nos extremos da distribuição ($|\theta| > 2$). Para tamanhos de teste maiores, os ajustes apresentados parecem ser razoáveis. Na sequência do trabalho será estudada a situação em que desconhecemos os parâmetros dos itens e traços latentes, desenvolvendo a estimação via Máxima Verossimilhança Marginal (MVM).