

Árvores Geradoras de Dilatação Mínima em Grafos Geométricos

Autor: Miguel F. A. de Mattos Gaiowski (miggaiowski@gmail.com)
Orientador: Cid Carvalho de Souza (cid@ic.unicamp.br)

Financiado pelo CNPq

Palavras-chave: GRASP, Geometria Computacional, Dilatação Mínima.



Motivação: uma aplicação prática

Considere a seguinte situação: uma empresa aérea foi autorizada a operar $n - 1$ vôos entre n cidades. Cada vôo deve ser feito entre duas dessas cidades e não pode ter escalas. A empresa é livre para escolher quaisquer vôos que quiser mas, por razões de mercado, decidiu oferecer aos seus clientes a possibilidade de viajar entre quaisquer duas cidades, possivelmente parando em cidades intermediárias, apenas viajando em vôos operados por ela. Considerando todos os pares de cidade, o objetivo da empresa é minimizar a razão entre o tempo total de viagem (soma dos tempos dos vôos efetuados) pelo tempo do vôo direto. Assim, desprezando-se os tempos de espera nos aeroportos, percebe-se que a estratégia da empresa é tentar minimizar o maior atraso que um cliente terá para ir de uma cidade a outra para a qual a empresa não oferece um vôo direto

Definição do Problema

Seja $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto de pontos no plano. Define-se *grafo geométrico* $G(P)$ associado a P como sendo o grafo não-direcionado ponderado completo de n vértices cujo peso de uma aresta corresponde à distância euclidiana entre os pontos representados por suas extremidades. Dado um subgrafo conexo T , de $n - 1$ arestas, gerador de $G(P)$ para quaisquer dois pontos, p_u e p_v , de P , denota-se por $\pi_T(u, v)$ o comprimento de um caminho mínimo entre os vértices u e v no grafo T onde, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, o vértice i de T (ou $G(P)$) representa o ponto p_i de P . Note-se que o comprimento de um caminho é dado pela soma dos pesos das arestas do caminho.

A partir das definições acima, a *dilatação de u, v* no subgrafo T é definida como sendo:

$$\delta_T(u, v) = \frac{\pi_T(u, v)}{|uv|},$$

onde $|uv|$ denota a distância euclidiana entre os pontos p_u e p_v de P . Já a dilatação do grafo T é dada por:

$$\delta(T) = \max_{u \neq v \in E} \frac{\pi_T(u, v)}{|uv|}$$

O Problema da Árvore Geradora de Dilatação Mínima em Grafos Geométricos (PAGDMGG) consiste em selecionar as $n - 1$ arestas para minimizar $\delta(T)$. Este problema pertence a classe \mathcal{NP} -difícil.

Heurística GRASP

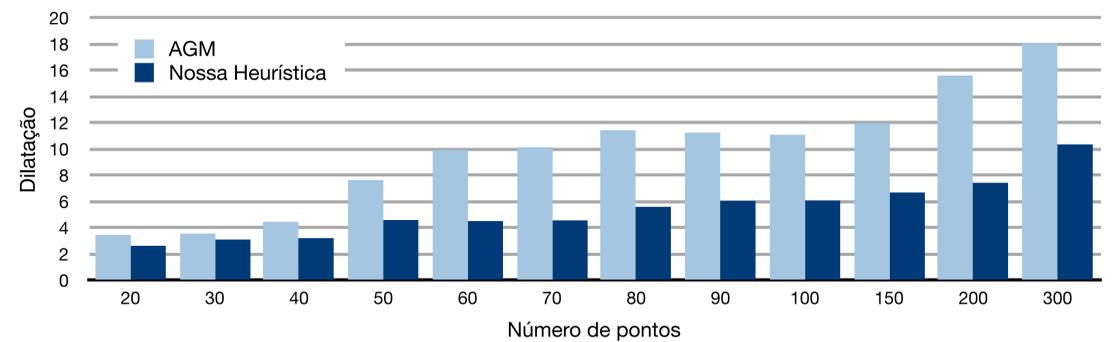
Como o PAGDMGG pertence a classe \mathcal{NP} -difícil, é improvável que exista um algoritmo exato que resolva o problema em tempo polinomial. Sendo assim, heurísticas podem ser uma boa alternativa para encontrar boas soluções em tempo aceitável. Para este trabalho foram desenvolvidas heurísticas baseadas do paradigma GRASP. Além disso também foi usada a técnica de path-relinking para melhora das soluções.

Referências

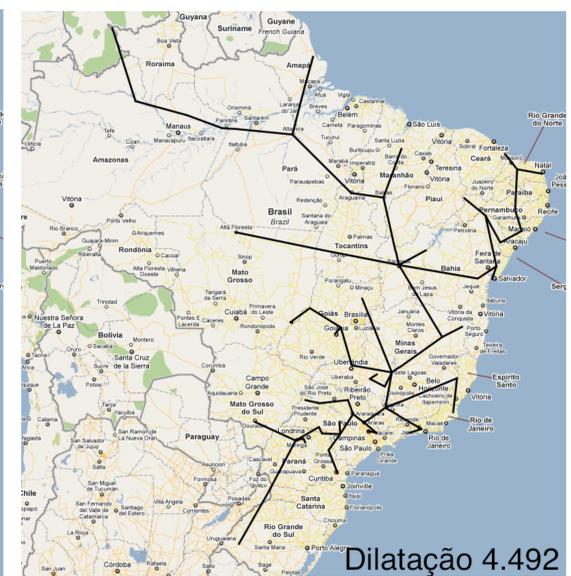
- [1] Cheong, O., Haverkort, H. and Lee, M. (2008) Computing a minimum-dilation spanning tree is NP-hard *Comput. Geom. Theory Appl.*, 41(3):188–205.
- [2] M. G. C. Resende and C. C. Ribeiro (2009) Greedy randomized adaptive search procedures: Advances, hybridizations, and applications *Handbook of Metaheuristics*, 57:219–249.
- [3] Klein, Rolf and Kutz, Martin (2007) Computing geometric minimum-dilation graphs is NP-hard *Lecture Notes in Computer Science*, 4372:196–207.
- [4] Ribeiro, Celso C (2010) Path-Relinking Intensification Methods for Stochastic Local Search Algorithms
- [5] Tageo.com (2010) <http://www.tageo.com/index-e-br-airport-br.htm>

Resultados

Foram criadas instâncias nas quais os pontos são os k maiores aeroportos do Brasil. O gráfico abaixo mostra a dilatação da Árvore Geradora de Custo Mínimo (AGM) e da melhor solução obtida com nossa heurística.



As figuras abaixo mostram a AGM para a instância com 60 aeroportos e o resultado do nosso GRASP com path relinking. A primeira tem dilatação 9.908, enquanto que a nossa solução cai para 4.492, um ganho de aproximadamente 54%. As soluções são desenhadas por nossa interface sobre um mapa do Google Maps.



Um exemplo maior, com os 300 maiores aeroportos brasileiros, melhora de 42%:

