

Introdução

Uma ferramenta poderosa na aquisição sísmica é simular propagações de ondas no subsolo terrestre. Tendo uma estrutura conhecida para a sub-superfície pode-se prever a resposta que um conjunto de sensores obterá.

Metodologia

A base fundamental do trabalho foi a Equação da Onda Acústica. Estudamos a solução analítica dessa equação nos casos unidimensional, bidimensional e tridimensional, mas em termos gerais a equação é dada por

$$(1) \quad \frac{1}{v(\mathbf{x})^2} U_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta U(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t),$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2$ ou $3, t \in \mathbb{R}, F$ é função que descreve a fonte e v é a função que descreve a velocidade de propagação no meio acústico e Δ é o operador Laplaciano.

No caso particular $n = 1$ e $F = 0$ e meio homogêneo a solução da equação é a solução de D'Alembert. Entretanto, o objetivo era trabalhar com campo de velocidade variável. Desse modo analisamos o problema como

$$(2) \quad \frac{1}{v(x)^2} U_{tt}(x, t) - \Delta U(x, t) = \delta(x)f(t),$$

com a condição $U(x, t) = 0, t < 0$. Onde δ é a “função” Delta de Dirac e f é uma função que descreve como a fonte atua ao longo do tempo. Em outras palavras estamos querendo uma solução causal, para uma fonte pontual com assinatura f localizada na origem. Para encontrar a solução para esse modelo utilizamos ferramentas numéricas que aproximam o cálculo da derivada que envolva somente diferenças e quocientes finitos, isto é, empregamos o Método de Diferenças Finitas (MDF).

A fórmula para o operador de quarta ordem no espaço e de segunda ordem no tempo respectivamente são dadas por

$$(3) \quad g_i'' = (-g_{i-2} + 16g_{i-1} - 30g_i + 16g_{i+1} - g_{i+2})/12h^2 + O(h^4),$$

$$(4) \quad g_i'' = (g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1})/h^2 + O(h^2),$$

onde h é a discretização da malha.

Com as fórmulas (3) e (4) obtemos um procedimento recursivo para a implementação do algoritmo de Diferenças Finitas. Utilizamos uma função fonte que possui a forma da segunda derivada da função Gaussiana. Denominada pulso de Ricker

$$(5) \quad f(t) = \left(1 - 2 \left[\pi \left(\frac{2t}{T} - 1\right)\right]^2\right) e^{-\left[\pi \left(\frac{2t}{T} - 1\right)\right]^2}, \text{ onde } T \text{ é a duração do pulso.}$$

Para haver mais estabilidade pegamos uma malha uniforme $\Delta x = \Delta z$, que, visando evitar dispersão deve satisfazer às relações seguintes

$$(6) \quad \Delta x = \Delta z \leq \frac{v_{min}}{\alpha f_{max}} \quad \text{e} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\beta v_{max}},$$

onde Δx e Δz são os intervalos espaciais, Δt o intervalo temporal, v_{min}, v_{max} são as velocidades mínimas e máximas, f_{max} é a frequência máxima da fonte e as constantes α e β são parâmetros que dependem da ordem de aproximação.

Resultados

1 – Caso Unidimensional: $v(x) = 2 + x/3, \Delta x = 0.05 \text{ km}, \Delta t = 0.01 \text{ s}$

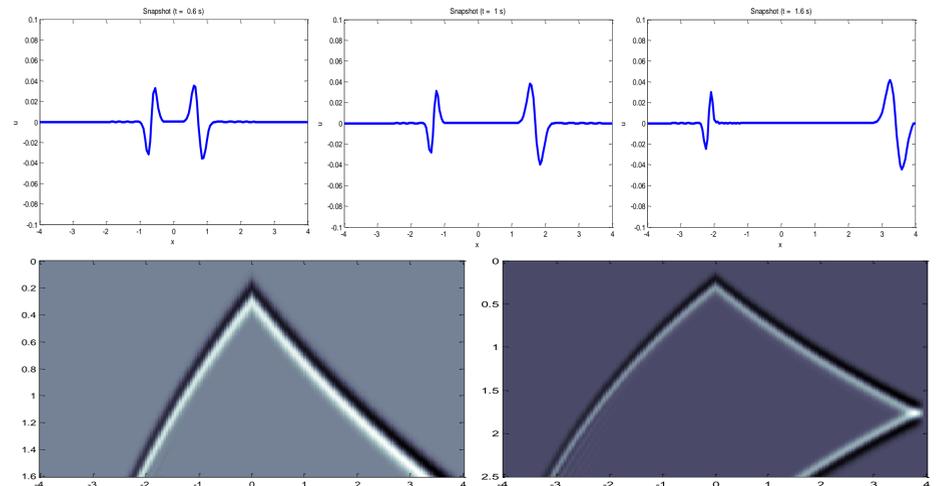


Figura 1: Snapshots e solução $U(x, t)$, a última imagem mostra uma situação onde houve reflexão.

2 – Caso Bidimensional: $v(x, z) = |z/3| + 2, \Delta x = \Delta z = 0.05 \text{ km}, \Delta t = 0.01 \text{ s}$

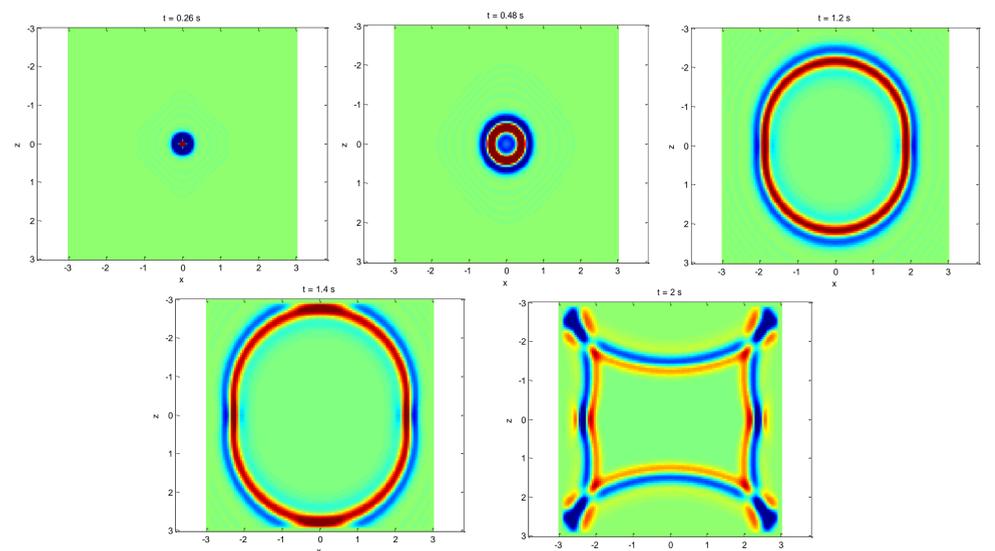


Figura 2: Snapshots, para $t = 2 \text{ s}$ temos a ocorrência de reflexão.

Com $v(x, z) = (x + z)/4 + 2$, temos

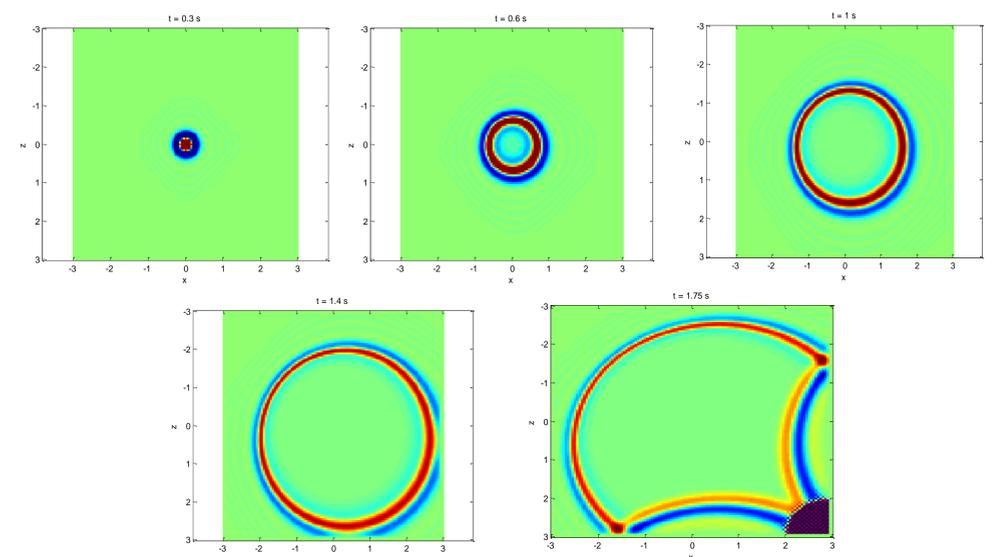


Figura 3: Snapshots, observe que no caso $t = 1,75 \text{ s}$ temos reflexão e dispersão.

Conclusão

Os Modelos apresentam soluções bem comportadas, indicando que tivemos sucesso na implementação numérica da solução evitando dispersões, a menos que deixamos ocorrer apenas para analisar a imagem.

Referência Bibliográfica

NOVAIS, M. A., Modelamento de Kirchhoff/Born para propagação de ondas. Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP 1998.