# FILTRAGEM ESTOCÁSTICA APLICADA A SISTEMAS MAX-PLUS LINEARES

Aluno: Diego Figueirêdo e Silva  Orientador: Rafael Santos Mendes

DCA/FEEC/UNICAMP

Apoio: CNPq

Palavras-Chave: Filtragem Estocástica, Sistemas a Eventos Discretos, Álgebra Max-plus, Filtros de Partículas

## Introdução

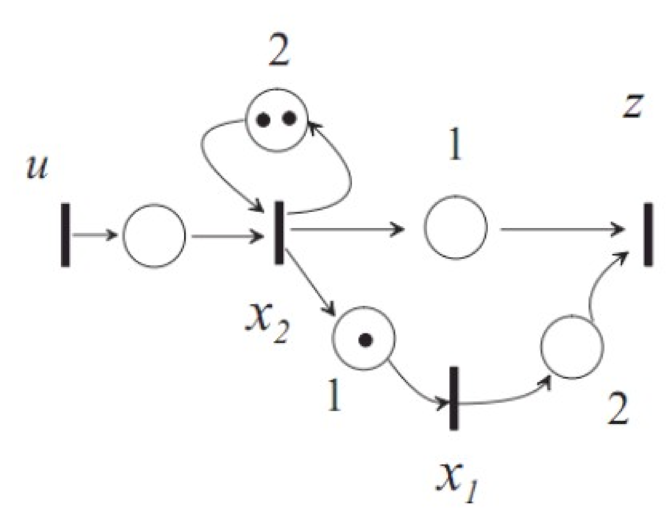
Este trabalho propõe a aplicação de técnicas de filtragem estocástica sobre sistemas a eventos discretos (SEDs) modelados em Álgebra Max-plus. Tal aplicação permite a estimação de parâmetros e estados não observados de um SED a partir de um modelo de seu comportamento e da observação de algumas de suas saídas. O filtro estudado é o filtro de partículas, cujo funcionamento é baseado na integração de Monte Carlo, e cuja utilização vem se popularizando nos últimos anos pois, embora tenha um custo computacional alto para a época em que foi proposto (anos 90), este custo foi compensado pela rápida evolução dos sistemas computacionais modernos. Além disso, o filtro de partículas tem restrições de aplicação relativamente fracas quando comparado a outros filtros (a exemplo, a aplicação clássica do filtro de kalman é restrita a sistemas sobre os quais atuam ruídos gaussianos), o que o torna ideal para um primeiro estudo mais geral sobre a sua utilização em SEDs.

## Sistemas a Eventos Discretos

Chamam-se Sistemas a Eventos Discretos os sistemas cuja dinâmica é regida pela ocorrência de eventos, dentre os quais destacam-se as linhas de produção. Seus estados são chamados de datadores e registram quando cada evento ocorre. É usual a representação gráfica de tais sistemas por Redes de Petri.

Uma rede de Petri possui três elementos básicos: transições, lugares e fichas. Os recursos do sistema são representados por fichas nas diversas posições do processo de produção, as durações das atividades são representadas pelo tempo de permanência das fichas nos lugares e as ocorrências dos eventos são representadas pelos disparos das transições, que consomem fichas nos lugares anteriores à transição e produzem fichas nos lugares seguintes à transição.

Deste modo, pode-se representar um SED utilizando uma rede de Petri como no exemplo abaixo:




## Álgebra Max-plus

A partir de uma rede de Petri, dentre outros métodos, pode-se obter as equações que descrevem o comportamento do SED estudado. No caso do exemplo acima, obtém as seguintes equações:

$$x_1(k) = 1 + x_2(k-1)$$
$$x_2(k) = \max\{2 + x_2(k-1); u(k)\}$$
$$z(k) = \max\{2 + x_1(k); 1 + x_2(k)\}$$

Pode-se perceber que as equações obtidas não são lineares na álgebra usual, o que dificulta o seu estudo. No entanto, o mesmo sistema de equações é linear em álgebra max-plus, cuja soma é definida como o máximo entre os termos somados e a multiplicação é definida como a soma usual de dois termos, de modo que obtém-se:

$$x_1(k) = 1 \otimes x_2(k-1)$$
$$x_2(k) = 2 \otimes x_2(k-1) \oplus u(k)$$
$$z(k) = 2 \otimes x_1(k) \oplus 1 \otimes x_2(k)$$

E, em forma matricial:

$$x_k = A \otimes x_{k-1} \oplus B \otimes u_k$$
$$z_k = C \otimes x_k$$

sendo:

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 1 \\ -\infty & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_2(k) \end{pmatrix}^T;\ u_k = u(k) \text{ e } z_k = z(k)$$

## Filtro de Partículas

Filtro de partículas são filtros que realizam estimação sequencial de Monte-Carlo e guardam a densidade de probabilidade do estado do sistema na forma de partículas. O método de Monte-Carlo funciona da seguinte forma. Seja

$$I = \int f(x) \cdot \pi(x) dx$$

uma integral na qual *π(x)* pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Se é possível amostrar *x* com densidade de probabilidade *π(x)*, então, pode-se utilizar tais amostras para estimar *I* :

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x^i)$$

onde $N$ é o número de amostras e $x^i$ corresponde à amostra de $x$ de índice $i$. Adaptando-se este processo aos sistemas estudados, tem-se que:

$$p(\mathbf{X}_{k-1}|\mathbf{Z}_k) \cong \sum_{i=1}^{N} w_k^i \cdot \delta(\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-1}^i)$$

é uma estimativa do vetor de estados **X** na sua *k-1*-ésima repetição dado o vetor de saídas $\mathbf{Z}_k$ e $w$ é o peso associado a cada amostra, que é calculado em função da probabilidade desta amostra ter gerado a saída observada. Dado um conjunto inicial de amostras de **X**, o processo de filtragem consiste em primeiramente predizer o estado seguinte, a partir das equações apresentadas na seção de SEDs, e então refinar essa predição com a fase de atualização, na qual os pesos são modificados em função da nova observação de saída:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \cdot p(z_k|x_{k-1}^i)$$

onde $p(z_k|x^i_{k-1})$ é a função de verossimilhança. A estimação do estado a cada disparo é dada por:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{N} x_k^i \cdot w_k^i.$$

É usual na evolução de um algoritmo de filtragem a observação de um fenômeno de colapso de probabilidades ao longo das iterações, de modo que muitas partículas adquirem peso desprezível. A ocorrência deste fato leva a um mal-condicionamento da representação por partículas da densidade de probabilidade de $\mathbf{X}_k$. Para evitar este problema, quando se detecta que o número efetivo de partículas que representa a função de densidade de probabilidade é muito baixo, utiliza-se um procedimento de reamostragem de partículas, que pode ser resumido como segue. Cada partícula é clonada um número de vezes proporcional ao seu peso. Como o número total de partículas deve permanecer igual a *N*, resulta que as patículas com peso muito baixo não terão clones, sendo assim abandonadas. Após o procedimento de clonagem, os pesos das partículas sobreviventes são reajustados, assumindo o valor *1/N*.

O algoritmo de filtragem pode então ser resumido da seguinte forma:

1. **k=0;**
2. **Inicializar N partículas,** $X_0^i, i = 1, \ldots, N$;
3. **Para cada k:**
   - **Ler a medida** $z_k$;
   - **Atualizar os pesos de** $X_{k-1}^i$
   - **Se necessário, reamostrar;**
   - **Gerar as partículas para k**
   - **Estimar** $x_k$
4. **Fim**

## Resultados

Aplicou-se o algoritmo exposto a um sistema apresentado em um artigo que trata de SEDs max-plus, e como parâmetro de comparação implementou-se um observador, que é uma solução também estudada para o problema de estimativa de estados de um SED.

Os gráficos ao lado representam os dois estados cuja estimação é crítica, visto que os outros estados podem ser estimados com precisão. Os gráficos mostram que a solução filtrada tem precisão relevante quando comparada com a solução real e o observador.

| Erro Médio | | |
|---|---|---|
| Est. | Filt. | Obs. |
| $x_1$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_2$ | 1,19 | 2,61 |
| $x_3$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_4$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_5$ | 0,58 | 3,17 |
| $x_6$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_7$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_8$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_9$ | 0,00 | 0,00 |

| Erro Máximo | | |
|---|---|---|
| Est. | Filt. | Obs. |
| $x_1$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_2$ | 2,44 | 5,85 |
| $x_3$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_4$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_5$ | 1,25 | 5,66 |
| $x_6$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_7$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_8$ | 0,00 | 0,00 |
| $x_9$ | 0,00 | 0,00 |