Introdução à Programação Cônica

Nelson Gomes Brasil Junior
DMA - IMECC - UNICAMP
Bolsista - PIBIC/Cnpq

Margarida Pinheiro Mello
DMA - IMECC - UNICAMP
Orientadora

Otimização Cônica

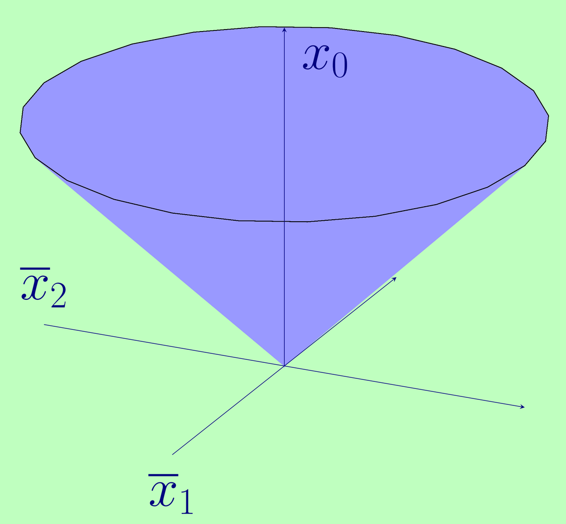
- Second Order Cone Programming (SOCP);
- **Primal** – (P)

$$
\begin{array}{lll}
\min & {c_1}^T x_1 + \cdots + {c_r}^T x_r & (1)\\
\text{s.a} & A_1 x_1 + \cdots + A_r x_r = b & (2)\\
 & x_i \succeq_{\mathcal{Q}} 0, \quad i = 1, \ldots, r. & (3)
\end{array}
$$

(1): Função objetivo linear;
(2): Restrição linear de igualdade;
(3): Restrição Cônica.

- Cone de segunda ordem:

$$\mathcal{Q}_n = \{ x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_0 \geq \|\overline{x}\| \};$$



Exemplos

- Problema de localização;
  Instalação de uma nova fábrica de modo a mininizar distâncias (normas);

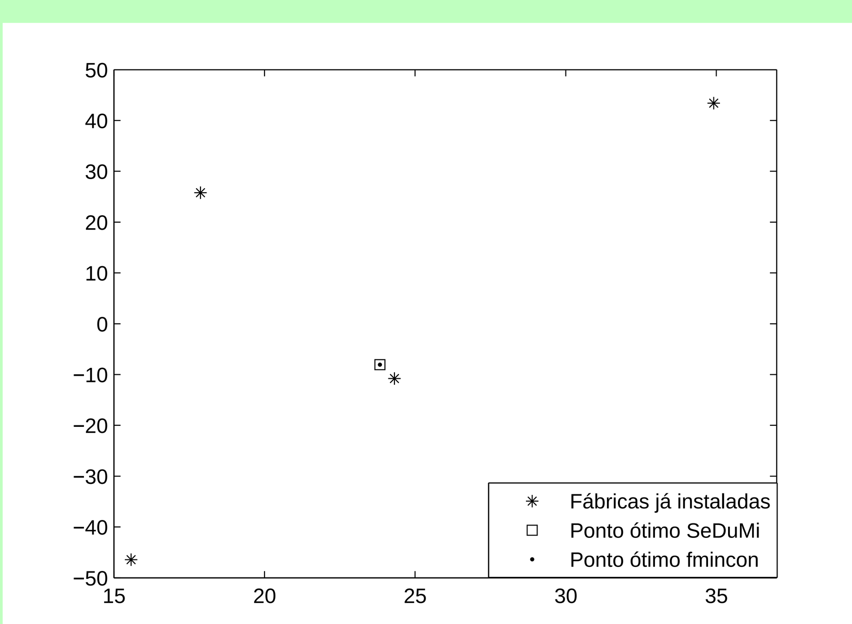


Figura 1: Problema das fábricas (problema de localização)

- Otimização de Portfólios;
  Maximizar o retorno minimizando o risco;
- Equilíbrio de um sistema de molas não lineares;
  Minimização da energia total de modo a anular a força resultante do sistema.

Álgebra dos cones de Lorentz

- Dificuldade consiste na escrita da restrição cônica;
- Associação a uma álgebra através de um produto, implicando em uma forma conhecida

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x^T y \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 \\ \vdots \\ x_0 y_n + y_0 x_n \end{pmatrix} = Arw(x) y.$$

Dualidade

Dual – (D)

$$
\begin{array}{ll}
\max & b^T y\\
\text{s.a} & A_i^T y + z_i = c_i,\\
 & z_i \succeq_{\mathcal{Q}} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r.
\end{array}
$$

Condições de Otimalidade

$$
\begin{array}{l}
Ax = b, \quad x \in \mathcal{Q},\\
A^T y + z = c, \quad z \in \mathcal{Q},\\
x \circ z = 0.
\end{array}
$$

Possibilidades para o par Primal-Dual

- (P) e (D) tem soluções ótimas;
- (P)/(D) tem solução ótima mas (D)/(P) é inviável;
- $b^T y = c^T x$ mas o ótimo não é atingido.

Resolvendo um SOCP

- Sistema de condições de otimalidade perturbado (função de barreira);
- Problema de viabilidade com um chute inicial estritamente viável (caminho central);
- A matriz de coeficientes pode ser singular, mesmo que o ponto envolvido seja viável;
- Transformação de variáveis;
- Dado um chute inicial estritamente viável conseguimos um algoritmo que possui convergência polinomial.

SeDuMi

- Jos Sturm – 1997;
- Imre Pólik – a partir de 2003;
- Programação Semidefinida – SOCP é um caso particular;
- SOCP geral → problema auto-dual.

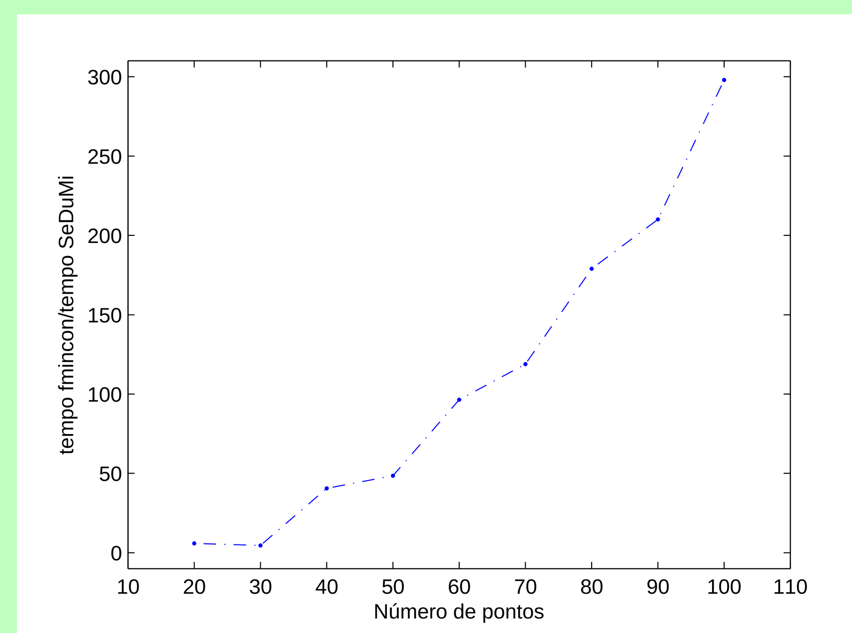


Figura 2: Comparação entre os tempos que cada método demorou para encontrar uma solução ótima

O SeDuMi torna-se mais eficaz para problemas de grande porte, acima de 500 variáveis.

Referências

[1] F. Alizadeh, D. Goldfarb, *Second Order Cone Programming*, Mathematical programming, 95(1):3-51, 2003.

[2] M.S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd e H. Lebret. *Applications of second-order cone programming*, Linear Algebra and its Applications, 284(1-3):193-228, 1998.

[3] J.F. Sturm. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optimization methods and software, 11(1):625-653, 1999.