Minimizando Risco de Crédito Utilizando Programação Linear

Rafael Santos Barbosa — DMA - IMECC - UNICAMP — rafa.san.bar@gmail.com

Prof. Antônio Carlos Moretti — DMA - IMECC - UNICAMP — moretti@ime.unicamp.br

palavras-chave: programação linear, gerenciamento de risco, otimização de portifólio

Introdução:

Neste trabalho apresentamos teorias de otimização matemática relacionados a gerenciamento de risco para investimentos. Foram trabalhadas teorias básicas como Matriz de Covariância, VaR, C-VaR. Por fim, implementamos um modelo de Programação Linear em AIMMS para obter resultados com um bom número de variáveis, restrições e parâmetros.

Métodos Estudados:

- Matriz de Covariância

A Matriz de Covariância nos dá a visão de como os ativos tendem a se comportar comparativamente, ou seja, se suas variações estão correlacionadas.

$C = \left(A^t P^{\frac{1}{2}t} P^{\frac{1}{2}} A\right)$

onde, P - Matriz de Probabilidades; A - Matriz dos Cenários (em relação a média)

	Início	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Cosan	25	20	28	22
Petrobras	30	35	25	28
Vivo	50	55	53	48

Matriz de Covariancia	Cosan	Petrobras	Vivo
Cosan	9,1875	-9,125	-0,625
Petrobras	-9,125	13,25	4,25
Vivo	-0,625	4,25	7,25

Matriz de Correlao	Cosan	Petrobras	Vivo
Cosan	1	-0,82704	-0,07658
Petrobras	-0,82704	1	0,433623
Vivo	-0,07658	0,433623	1

Métodos Estudados:

- Value-at-Risk

Mostramos para o VaR dois paradigmas diferentes:

1)Quando a função de perda é uma variável aleatória com distribuição induzida por um vetor y com distribuição contínua

$$\psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)\leq\alpha} p(y)dy$$

$$\text{Var}_\beta = min\,\{\alpha \in \mathbf{R} | \psi(x,\alpha) \geq \beta\}$$

2)Quando as funções de perda estão associadas a m cenários

$$\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} \geq \beta > \sum_{k=1}^{p_{i_k}}, \text{ sendo que } \beta \in (0,1),$$
$$\text{ento}: \ \beta - Var(x) = f_{i_p}(x),$$

- Conditional Value-at-Risk

Por VaR não ser uma medida coerente, otimizamos o C-VaR também sobre os dois paradigmas citados:

1) Quando a função de perda é uma variável aleatória com distribuição induzida por um vetor y com distribuição contínua

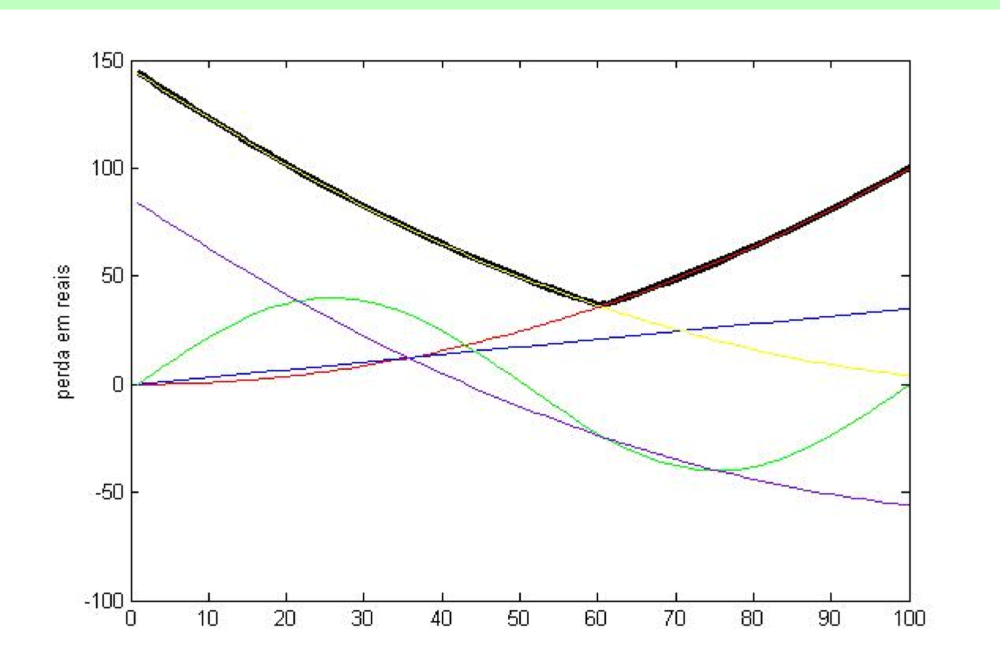
$$\beta - CVaR = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y)\geq\beta - CVaR} f(x,y)p(y)dy$$

2) Quando as funções de perda estão associadas a "m"cenários

$$\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} \geq \beta > \sum_{k=1}^{p-1} p_{i_k}, \text{sendo que } \beta \in (0,1),$$
$$\text{então, } \beta - CVaR = (1-\beta)^{-1}[(\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} - \beta) f_{i_p(x)} + \sum_{k=p+1}^{m} p_{i_k}(f_{i_k}(x))],$$
se os cenários são equiprováveis
$$\beta - CVaR = (1-\beta)^{-1}[\sum_{k=p+1}^{m} p_{i_k}(f_{i_{k(x)}}(x))]$$

Ideia Gráfica:

A partir do entendimento geométrico podemos ver que o $VaR_{100\%}(x)$ a maior perda associada a um portifólio. Também podemos ver características como a não linearidade e não convexidade.



Modelo de PL implementado:

O modelo implementado considera $x \in \Omega$ que pode ser adequado de acordo com a maneira que o investidor se interessar. No nosso caso utilizamos $x_1 + \cdots + x_m = 100$,

$$Min \quad \alpha + \frac{1}{m-p}\sum_{k=1}^{m}[z_i]$$
$$s.a: \ x \in \Omega$$
$$z_i \geq 0 \forall i = 1, \cdots, m$$
$$z_i \geq f_i(x) - \alpha \forall i = 1, \cdots, m$$

Resultados:

	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 20\%$	$\beta = 25\%$	$\beta = 50\%$
VaR	-100	-99	-42	-32	1
C-VaR	-4	2	13	16,7654	33,1967

Ações	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 20\%$	$\beta = 25\%$	$\beta = 50\%$
PETR4	0	0	14,234	16,4828	16,2066
VIVO4	0	0	14,2832	16,4777	16,4465
BTOW3	0	0	0,0336	0,4374	15,874
AMBV4F	0	0,0299	14,3706	16,5919	16,3626
NDX	0	0,1252	28,3159	17,1683	17,4035
BVSP	100	99,8349	28,7625	32,8418	17,7067

Conclusões:

Podemos concluir com este trabalho que partir de um modelo de Programação Linear bem formulado, mesmo que básico, foi possível utilizar uma simulação de dados simples e gerar um número de cenários desejado, com esses dados podemos utilizar um software para conseguir diversos resultados e ter uma ideia melhor de como investir. Também comprovamos que para expor nossos investimentos a grandes riscos o mais indicado diversificar o números de ações.

Referências

[1] J. M., Martínez. Elementos de Otimização e Risco, Notas de MS416 - Modelos Matemáticos Aplicados a Economia

[2] BUENO, Luís F. C. R., Medidas de Risco em Otimização de Portfólios, Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

[3] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, Optimization of Conditional. Value-at-Risk Journal of Risk 2 ages: 21-41 January 2000.