CIRCUITOS ELÉTRICOS DE ORDEM FRACIONÁRIA

UNICAMP

Aluna: Marília Helena Freitas de Souza mariliahfsouza@gmail.com
Orientador: Yaro Burian Junior yaroburian@gmail.com

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

SAE – Serviço de Apoio ao Estudante

Derivadas - fracionárias– circuitos

A idéia de derivadas de ordem não inteira pode ter aparecido em uma carta datada de 30 de setembro de 1695, na qual L'Hopital perguntava a Leibnitz sobre um eventual significado da notação de Leibnitz para derivadas

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$$

se n fosse igual a meio. A resposta de Leibnitz teria sido "um aparente paradoxo, do qual virão conseqüências úteis".

Existem diversas definições para as derivadas de ordem fracionária. Um problema que retardou o amadurecimento da teoria foi o fato de estas definições não levarem aos mesmos resultados .

Derivada fracionaria de funções senoidais

A idéia de derivada fracionaria ocorre muito facilmente quando se analisam derivadas de algumas funções. Assim, a expressão para a derivada de ordem n (com n inteiro) da função $A\cos(\omega t+\phi)$, chamada, na linguagem da engenharia elétrica de função senoidal (com amplitude A, freqüência angular ω e fase ϕ) é dada por :

$$\frac{d^n}{dt^n}A\cos(\omega t+\varphi)=\omega^n A\cos(\omega t+\varphi+n\pi/2)$$

A amplitude é multiplicada por ω^n e a fase é adiantada de $\frac{n\pi}{2}$. Esta definição pode ser estendida para n não inteiro. Assim, por exemplo, a derivada de ordem meio da função senoida $A\cos(\omega t+\phi)$ seria dada por $\sqrt{\omega}A\cos(\omega t+\phi+\pi/4)$.

A expressão para derivadas de ordem inteira ou fracionária no caso de funções senoidais fica muito simples se estas funções são representada por um fasor: a derivada de ordem n da função é representada por um fasor obtido multiplicando o fasor que representa a função por $(j\omega)^n$.

Funções periódicas, que podem ser expressas por serie de Fourier também permitem esta extensão do conceito de derivada. Um exemplo é dado pela função 'senoide retificada em meia onda' que é igual a cos(t) quando esta função é positiva e igual a zero quando negativa. Esta função pode ser desenvolvida em uma série de Fourier :

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{2}{3\pi}\cos(2t)-\frac{2}{15\pi}\cos(4t)+\frac{2}{35\pi}\cos(6t)-\frac{2}{63\pi}\cos(8t)+\frac{2}{99\pi}\cos(10t)+\ldots$$

A figura 1 representa as aproximações desta função e de sua derivada de ordem meio, correspondentes às somas das séries truncadas após a harmônica de ordem 20

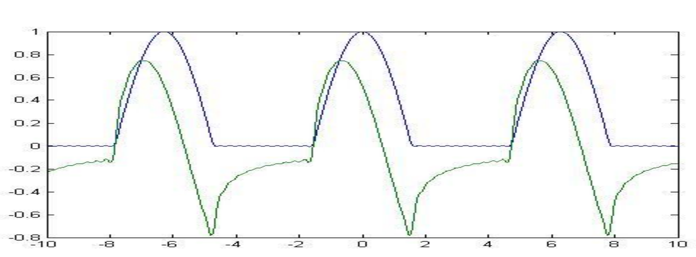

Figura 1- Função e sua derivada em serie de Fourier

Cabe observar que a figura representando a derivada de ordem meio da senoide retificada em meia onda parece familiar: ela lembra a resposta de um circuito passa altas excitado pela mesma função, como será visto na seção seguinte.

Um procedimento semelhante pode ser empregado para obter derivadas fracionárias de funções não periódicas se elas tiverem transformadas de Fourier. Se a transformada de Fourier de uma função f(t) é uma função F(ω) a transformada de Fourier de sua derivada de ordem n é $(j\omega)^n F(\omega)$. Novamente é possível a extensão para não inteiro e também a observação de que a derivada obtida é sempre uma função que tem transformada de Fourier.

O método dos coeficientes a determinar permite obter soluções particulares para equações diferenciais lineares não autônomas para algumas funções de entrada . Entre estas funções estão as funções senoidais (na linguagem da engenharia elétrica, como definidas acima). Neste caso as soluções são procuradas também como funções senoidais com a mesma freqüência da entrada e com amplitudes e fases a serem determinadas.

O princípio de superposição permite estender o método dos coeficientes a determinar para obter soluções particulares para estas equações quando as entradas são funções periódicas podendo ser desenvolvidas em série de Fourier. As soluções particulares serão também periódicas. Como exemplo, um circuito passa altas descrito pela equação

$$\frac{dx}{dt}+x=\frac{d}{dt}f(t)$$

e no qual a entrada seja a senoide retificada em meia onda definida acima, são representadas na figura 3, as aproximações da função f(t) e da saída correspondentes às somas das respectivas séries de Fourier truncadas após a harmônica de ordem 20.

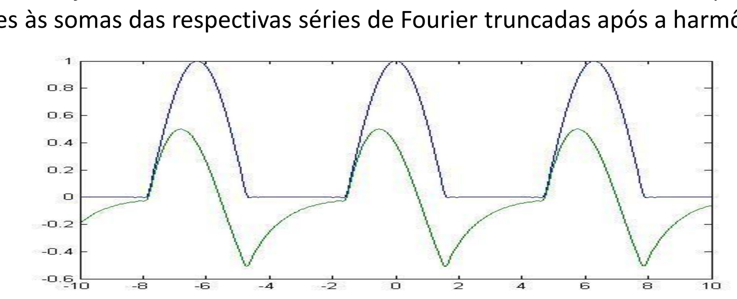

Figura 3 - Resposta do circuito passa altas

E o procedimento pode ainda ser estendido para funções não periódicas, mas que tenham transformadas de Fourier, obtendo-se soluções que têm transformada de Fourier.

O método dos coeficientes a determinar fornece soluções particulares. Não é levado em conta o estado inicial do circuito. No caso dos circuitos estáveis, A solução completa para o circuito seria obtida acrescentando-se à solução particular uma solução geral da equação para o circuito autônomo no caso dos circuitos o esta parcela tende a zero com o decorrer do tempo, de modo que a solução particular obtida anteriormente é a solução em regime permanente.

O resultado do procedimento é ilustrado na Figura 4, para o exemplo circuito passa altas com entrada senoidal. Em azul aparece uma entrada senoidal , em vermelho a solução particular obtida pelo método dos coeficientes a determinar. E em verde a solução completa, considerando o valor inicial nulo. Nota-se que a solução completa tende, quando o tempo cresce, para a solução particular, solução em regime permanente.

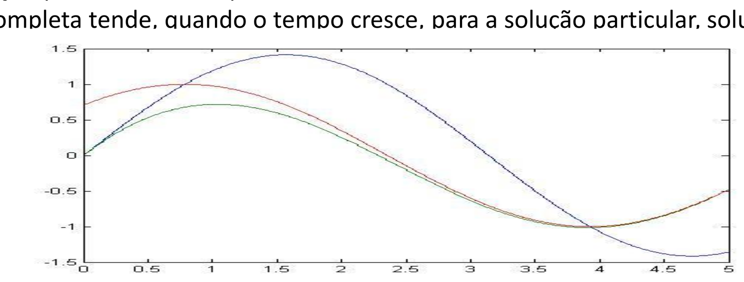

Figura 4 – Circuito passa alta com entrada senoidal

Em algumas circunstâncias, seja em determinações experimentais, seja em análises teóricas, aparecem funções de transferência que não são funções racionais de jω. No modelamento destes sistemas aparecem então derivadas não inteiras. Um exemplo é dado pela admitância característica de uma linha RC (com resistência em série e capacitância em derivação)

$$Y=\sqrt{j\omega C/R}$$

(com C e R sendo a capacitância e a resistência por unidade de comprimento). Esta função de transferência corresponde a uma derivada de ordem meio, a corrente que circula no ponto inicial de uma linha deste tipo é proporcional à derivada de ordem 1/2 da tensão aplicada neste ponto. Se for aplicada no ponto inicial desta linha uma tensão com a forma de uma senoide retificada em meia onda, a corrente, em regime permanente, terá a forma dada pela figura 1. As linhas de transmissão sugerem um caminho para a síntese de circuitos com derivadas fracionárias.

Estado inicial e derivadas fracionárias

O método de coeficientes a determinar, aplicado à solução de equações diferenciais lineares ou à obtenção de derivadas fracionárias fornece soluções que não levam em conta condições iniciais.
No caso da solução de equações diferenciais lineares é possível acrescentar uma parcela que leve em conta as condições iniciais.

Cabe então a questão: e no caso das derivadas fracionárias, existe algum procedimento semelhante, ou mesmo, é necessário um procedimento semelhante?

A consideração de um exemplo permite uma resposta positiva à última questão.

Se a tensão aplicada em uma linha de transmissão RC de comprimento infinito é constante (no tempo), isto é, tem freqüência nula, a corrente em regime permanente é nula, pois a função de transferência que relaciona corrente com tensão é a admitância característica da linha, dada por $\sqrt{j\omega C/R}$, é nula em freqüência nula. A tensão ao longo da linha é constante. Mas se a linha estiver inicialmente em estado nulo, com tensão e corrente nulas, ao aplicar uma tensão no seu ponto inicial deve haver um transitório inicial. Como a linha tem capacitâncias em derivação, ela deve ser *carregada* por meio de uma corrente inicial. Então, como calcular esta corrente?

Além das funções senoidais, a idéia de derivadas de ordem fracionária ocorre também para outras funções. No caso da função potência a expressão para a derivada de ordem n

$$\frac{d^n}{dt^n}t^p=\frac{p!}{(p-n)!}t^{p-n}$$

válida para p e t inteiros pode ser substituída por uma expressão utilizando a *função gama:*

$$\frac{d^n}{dt^n}t^p=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}t^{p-n}$$

que tem sentido para ordens n não inteiras e permite estender as definições de derivadas de ordem fracionária para todas as funções que possam ser desenvolvidas em série de potências .
Mas os resultados não são compatíveis com a definição anterior no caso de derivadas fracionárias. Assim a derivada de ordem meio de uma constante, considerada como exponencial, é nula

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\exp(0t)=0^{\frac{1}{2}}\exp(0t)=0$$

mas se a constante for considerada uma potência zero, a derivada não é nula (embora tenda a zero)

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t^0=\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)}t^{-\frac{1}{2}}\cong 0{,}5642t^{-\frac{1}{2}}$$

A figura 5 representa graficamente esta derivada.

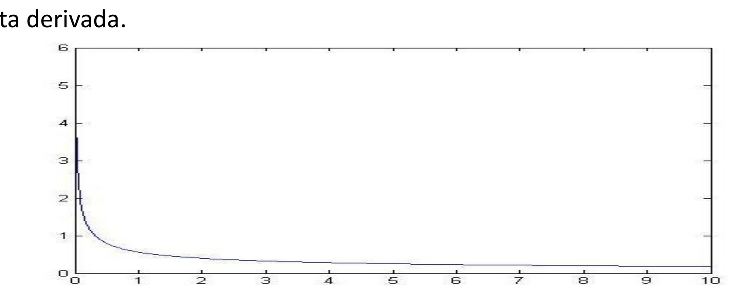

Figura 5 – Derivada de ordem meio de uma constante

Aqui pode ser feita uma conjectura. Será que esta expressão representa a corrente transitória no começo de uma linha de transmissão infinita inicialmente em estado nulo quando se aplica no ponto inicial desta linha uma tensão constante?

Em favor da conjectura, como foi observado, deve-se esperar uma corrente transitória para carregar a capacitância da linha. E a corrente em regime permanente deve ser nula. E a carga transportada por esta corrente dada pela respectiva integral é infinita, como deve ser pois a capacitância total da linha, que deve ser carregada com a tensão constante, é também infinita.

É interessante considerar um segundo exemplo. Aplicando no ponto inicial da linha RC uma tensão senoidal sin(t) a corrente, em regime permanente senoidal será a derivada de ordem meio da tensão: uma senoide com fase adiantada de π/4. Ora, se a tensão for aplicada no instante t=0 com a linha em estado nulo, a corrente, assim como a tensão, deve começar em zero. Mas não é o que acontece.

Por outro lado, a tensão aplicada pode ser desenvolvida em série de potências

$$\sin(t)=t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\frac{1}{7!}t^7\ldots$$

A derivada de ordem meio da tensão obtida por derivação termo a termo da série leva a

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\sin(t)\cong 1{,}1254\,t^{\frac{1}{2}}-0{,}3009\,t^{\frac{5}{2}}+0{,}0191\,t^{\frac{9}{2}}-0{,}0005t^{\frac{13}{2}}$$

A figura 6 representa a entrada senoidal (em azul), a solução permanente (em vermelho) e esta solução (em verde,truncada após o termo de grau 12,5).

Cabe a mesma conjectura. Esta derivada representa a solução completa para o problema, a corrente no início da linha, suposta inicialmente descarregada, quando se aplica uma tensão senoidal?

É interessante comparar esta figura 6 com a figura 4, que representa a resposta do circuito passa altas à mesma função senoidal.

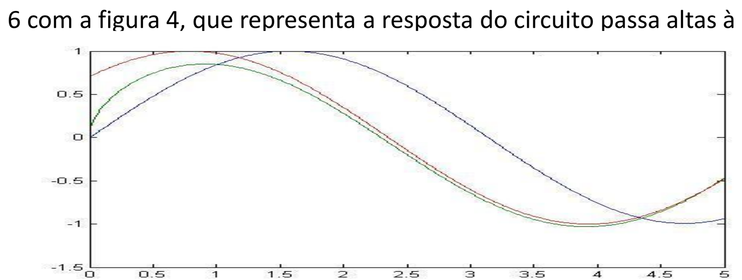

Figura 6 – Derivada de ordem meio em serie de potencias

A seção anterior mostrou que dois procedimentos alternativos para obtenção de uma derivada fracionária de ordem meio levaram a resultados diferentes e foi feita uma conjectura de que o segundo método levava em conta o estado inicial do sistema sendo estudado.

Também existem métodos alternativos para integração de uma equação diferencial linear como a do exemplo que descreve um circuito passa altas.

A solução da equação do circuito passa altas obtida pelo método do fator integrante é

$$\exp(t)\,x(t)-\exp(a)\,x(a)=\int_a^t \exp(\tau)\frac{d}{d\tau}f(\tau)d\tau$$

O instante denominado *a* é arbitrário, sendo muito frequentemente considerado 0. Neste caso x(0) é o valor inicial da solução.
No caso da entrada senoidal, esta expressão leva a:

$$x(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(-t)$$

que é a expressão da curva em verde, correspondente à resposta completa , na figura 4. O método do fator integrante leva diretamente à solução completa da equação diferencial.
Mas, por outro lado, é possível analisar o que acontece se, em lugar de considerar para *a* o valor 0, for considerado -∞. Obtém-se a solução

$$x(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Isto é, obtém-se a solução em regime permanente, a solução que seria obtida pelo método dos coeficientes a determinar, ou a solução a partir da resposta em freqüência.

Conclusão

A contradição entre os resultados para a derivação em ordem fracionária obtidos a partir das expressões para derivadas de funções exponenciais e de funções potência foi analisada no trabalho. Nesse trabalho mostrou-se que derivadas fracionárias envolvem intervalos de integração. A contradição é explicada pelo extremo inferior de integração diferente nos dois casos, seja 0 (utilizado implicitamente nas expressões para derivada fracionária a partir de derivadas de potências), seja -∞, utilizada implicitamente nas expressões para derivada fracionária a partir de exponenciais. Aqui foi visto que a mesma distinção aparece na integração de equações diferenciais ordinárias por métodos distintos. O método do fator integrante também difere dos métodos baseados em resposta em freqüência, portanto em expressões para derivadas de funções exponenciais no extremo inferior de integração utilizado.Embora não tenha sido, a rigor, demonstrada a conjectura colocada na análise da corrente em uma linha de transmissão, ela parece ser justificada.