O USO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO PARA A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Aluno: André Pellegrino Missaglia

UNICAMP - Faculdade de Ciências Aplicadas / Graduando em Engenharia de Manufatura

E-mail: andre.missaglia@fca.unicamp.br

Apoio: PIBIC - SAE

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Torezzan

UNICAMP - Faculdade de Ciências Aplicadas

E-mail: cristiano.torezzan@fca.unicamp.br

Introdução

Este trabalho apresenta um estudo sobre métodos de otimização aplicados na resolução de sistemas lineares. Solucionar um sistema linear de forma eficiente é de interesse das mais diversas áreas da ciência. Este trabalho está focado em dois métodos: máxima-descida e gradientes conjugados.

Resolvendo um sistema linear como um problema de otimização

Dado um sistema linear Ax = b a idéia básica é criar uma função quadrática auxiliar G: $R^n \to R$, definida por:

$$G(x) = \frac{1}{2}x^T A x - x^T b$$

Desta forma temos que $\nabla G = Ax - b$, de onde vemos que resolver $\nabla G = 0$ é equivalente a resolver Ax = b . Ou seja, resolver o sistema linear é equivalente a encontrar os pontos críticos de G.

Quando a matriz A é simétrica e definida positiva, a função quadrática G terá um único ponto crítico que será seu minimizador global.

Resolver um problema de otimização é, em geral, mais difícil do que resolver um sistema linear, mas no caso em que A é simétrica definida positiva, existem métodos eficientes para isso.

Máxima Descida e Gradientes Conjugados

A máxima descida é um método iterativo que, partindo de um ponto inicial, procura pontos que estejam mais próximos de um minimizador da função, caminhando sempre na direção de maior decrescimento local:

$$d = -\nabla G(x_k) = -Ax_k + b \tag{1}$$

A associação do tamanho de passo e a direção de caminhada é relacionada pela equação de reta:

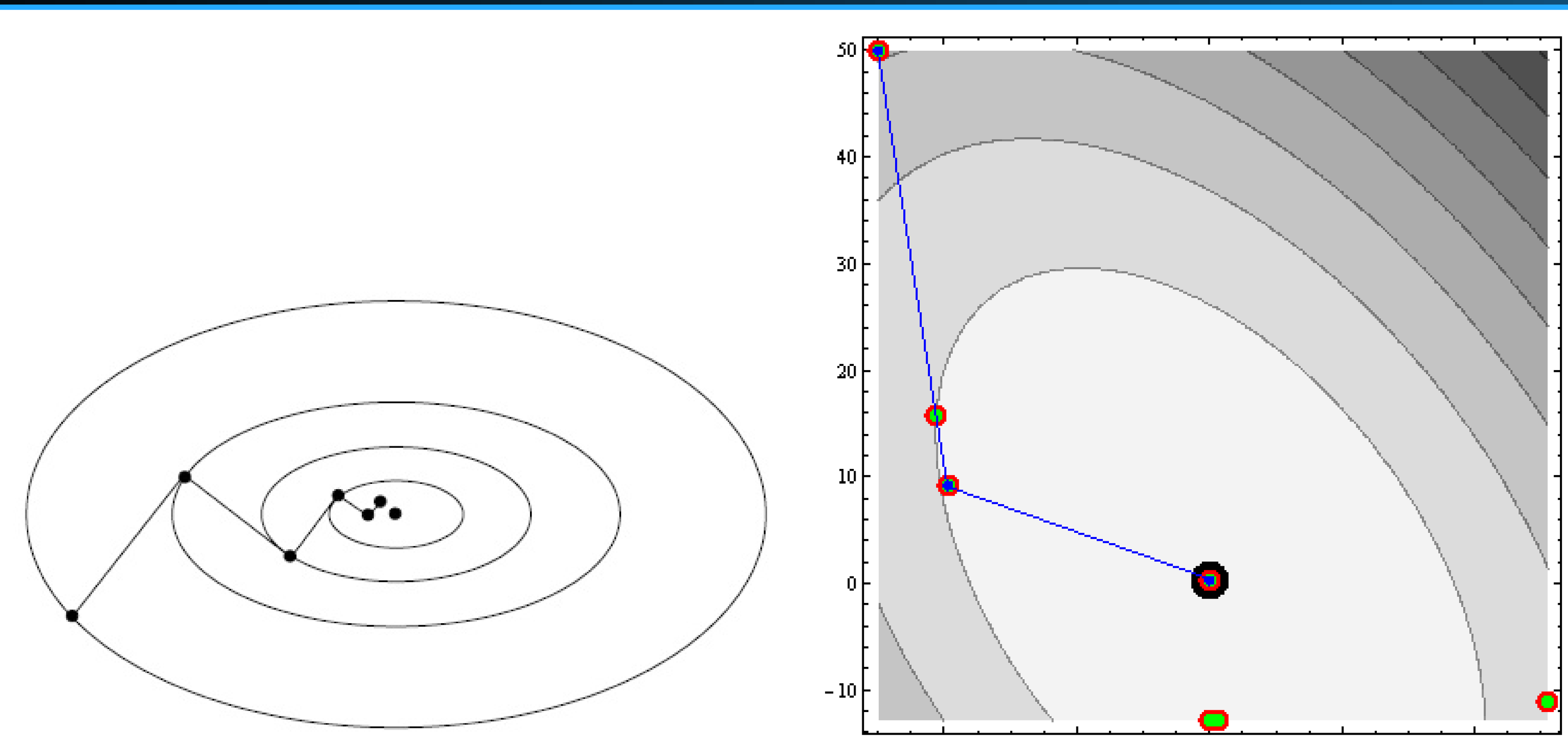
$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k, \tag{2}$$

onde α é igual é a:

$$\alpha_k = \frac{\nabla f_k^T \nabla f_k}{\nabla f_k^T A \nabla f_k}. \tag{3}$$

Já o método dos gradientes conjugados utilizada a mesma equação de reta do método anterior. O principal objetivo é encontrar uma direção d_k a cada iteração de forma que ela seja linearmente independente em relação aos anteriores $d_0, ..., d_{k-1}$. A escolha dessas direções tenta resolver o problema do "zig-zag" que ocorre no método da máxima descida, quando o ponto se encontra próximo da solução. Na teoria, o método dos G.C encontra a solução de um sistema $n \times n$ em n passos. Na prática, erros numéricos acabam exigindo algumas iterações extras, o que não compromete o desempenho do método.

Resultados e Gráficos



Método da Máxima Descida (esquerda) e resolução de um sistema linear com o uso dos gradientes conjugados (direita)

n	Núm. it. M.D	Núm. it. M.G.C	Tempo M.D	Tempo M.G.C	Tempo "LinearSolve"
2	15	2	*	*	*
5	250^+	5	*	*	*
10	500^+	10	0,015	*	*
15	750^+	18	0,016	*	0,016
20	1000^+	25	0,047	*	0,031
50	2500^+	71	0,156	*	0,141
100	5000^+	158	0,546	*	1,404
200	10000^+	357	2,995	*	21,809
500	25000^+	936	144,004	*	++

Tabela 1: Resultados de testes computacionais (*: tempo não significativo(<$10^{-3}s$)
$^+$: excedeu o número máximo de iterações
$^{++}$: excedeu a memória disponível pelo computador)

Conclusão

A partir da tabela acima, notamos que o método dos gradientes conjugados demanda um menor número de iterações para a convergência da solução, e, portanto, é menos custoso tanto com relação as iterações gastas como ao tempo para encontrar a solução. Notamos também que o método da descida leva mais tempo para encontrar a solução em relação ao ao comando LinearSolve do software Wolfran Mathematica 7.0 somente até sistemas de dimensão 50x50. Para n>50, conseguimos bons resultados com nossa implementação.

Referências

[1] WATKINS, David. Fundamentals of Matrix Computations. 2 ed. Nova Iorque: Wiley Interscience, 2002.

[2] NOCEDAL, Jorge; WRIGHT, Stephen. Numerical Optimization. 2 ed. Estados Unidos da América: Springer, 2006

[3] FRIEDLANDER, Ana. Elementos de Programação Não-Linear. 1 ed. Campinas-SP: Editora Unicamp, 1994.