

Carolina Arruda Moreira

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
maanilorac@gmail.com

Ricardo Antonio Mosna

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
mosna@ime.unicamp.br

Introdução

A mecânica das colisões está vinculada à interação entre dois ou mais corpos com transferência mútua de momento e energia. O chamado "Berço de Newton" é o exemplo clássico do problema de colisões em uma dimensão. Para conhecer o comportamento final dos corpos, faz-se uso das leis de conservação de energia e momento linear. Contudo, para três ou mais esferas, não é possível especificar a evolução temporal dos corpos sem conhecimento explícito do tipo de força de contato entre as esferas.

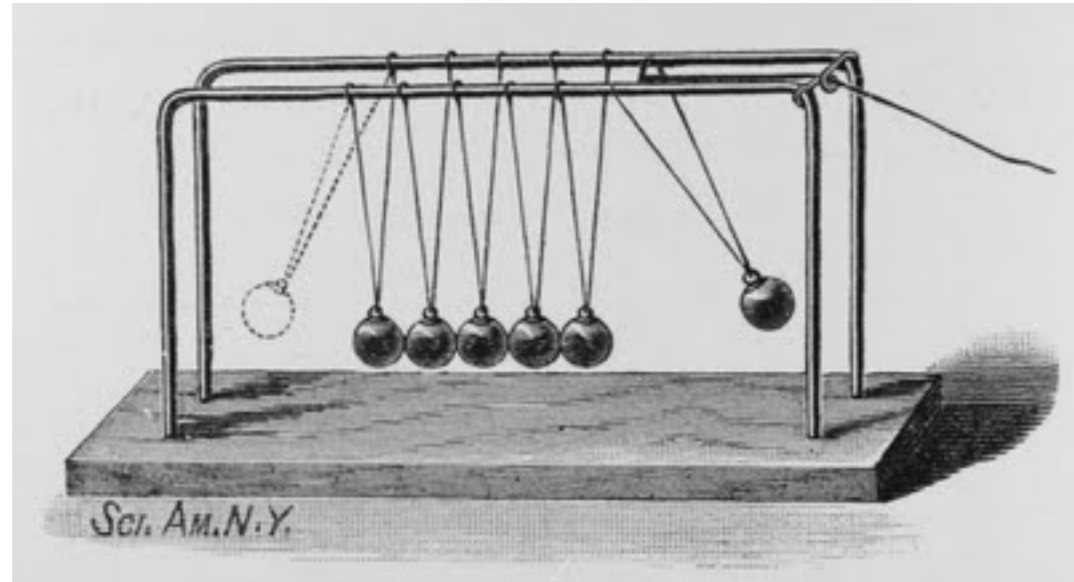


Figura 1: Ilustração artística do chamado Berço de Newton.

Neste trabalho, revisamos o estudo das colisões elásticas e inelásticas e reproduzimos o artigo [2] com o auxílio do software *Mathematica*. Posteriormente, analisamos o comportamento após as esferas interagirem sob uma força de contato do tipo degrau e finalizamos generalizando para n corpos.

Colisões

Na primeira parte do trabalho, estudamos a força de contato entre dois corpos vizinhos como sendo:

$$F_{\alpha}(\delta) = \begin{cases} a\delta^{\alpha} & \text{se } \delta \geq 0 \\ 0 & \text{se } \delta < 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde a é uma constante positiva, δ é a distância em relação ao ponto onde as esferas estão "somente em contato" e α é um parâmetro que, dependendo do valor, representa algum tipo de força, como por exemplo:

- $\alpha \gg 1$, repulsão forte (*hard core*)
- $\alpha = \frac{3}{2}$, força de contato de Hertz
- $\alpha = 1$, lei de Hooke (força harmônica truncada)
- $\alpha \ll 1$, força do tipo "escada"

Para os cálculos, consideramos $m = r = 1$ e que a esfera incidente estava com velocidade constante v_0 e as demais em repouso.

Generalizando a análise, consideremos i bolinhas com $1 \leq i \leq n$. O sistema de equações é dado por:

$$\ddot{x}_i(t) = F[x_i(t) - x_{i-1}(t) - 2] - F[x_{i+1}(t) - x_i(t) - 2] \quad (2)$$

e as condições iniciais são:

$$x_i(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1 \\ 2i, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{x}_i(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1 \\ 0, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (4)$$

Inserindo o código no *Mathematica*, o usuário pode escolher o número de esferas a ser calculado. O gráfico abaixo ilustra o resultado da posição das esferas em função do tempo para um sistema de 5 esferas:

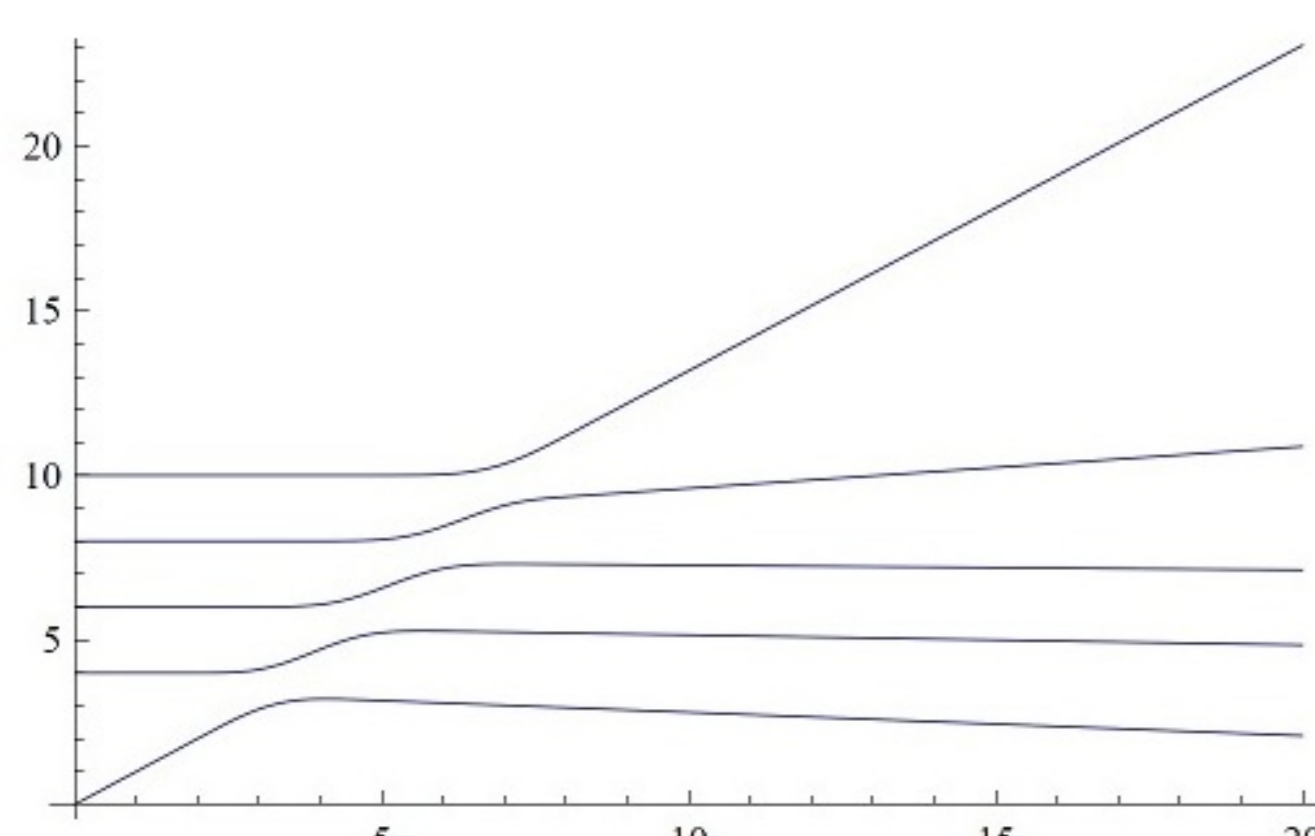


Figura 2: Gráfico da posição em função do tempo para 5 esferas.

Na segunda parte do projeto, analisamos um sistema composto por n esferas submetido à força do tipo degrau abaixo:

$$F = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta < \xi \\ F_0 & \text{se } \delta \geq \xi \end{cases} \quad (5)$$

onde definimos ξ como sendo um parâmetro no qual uma esfera pode penetrar na outra sem sentir quaisquer forças. O gráfico abaixo ilustra tal situação:

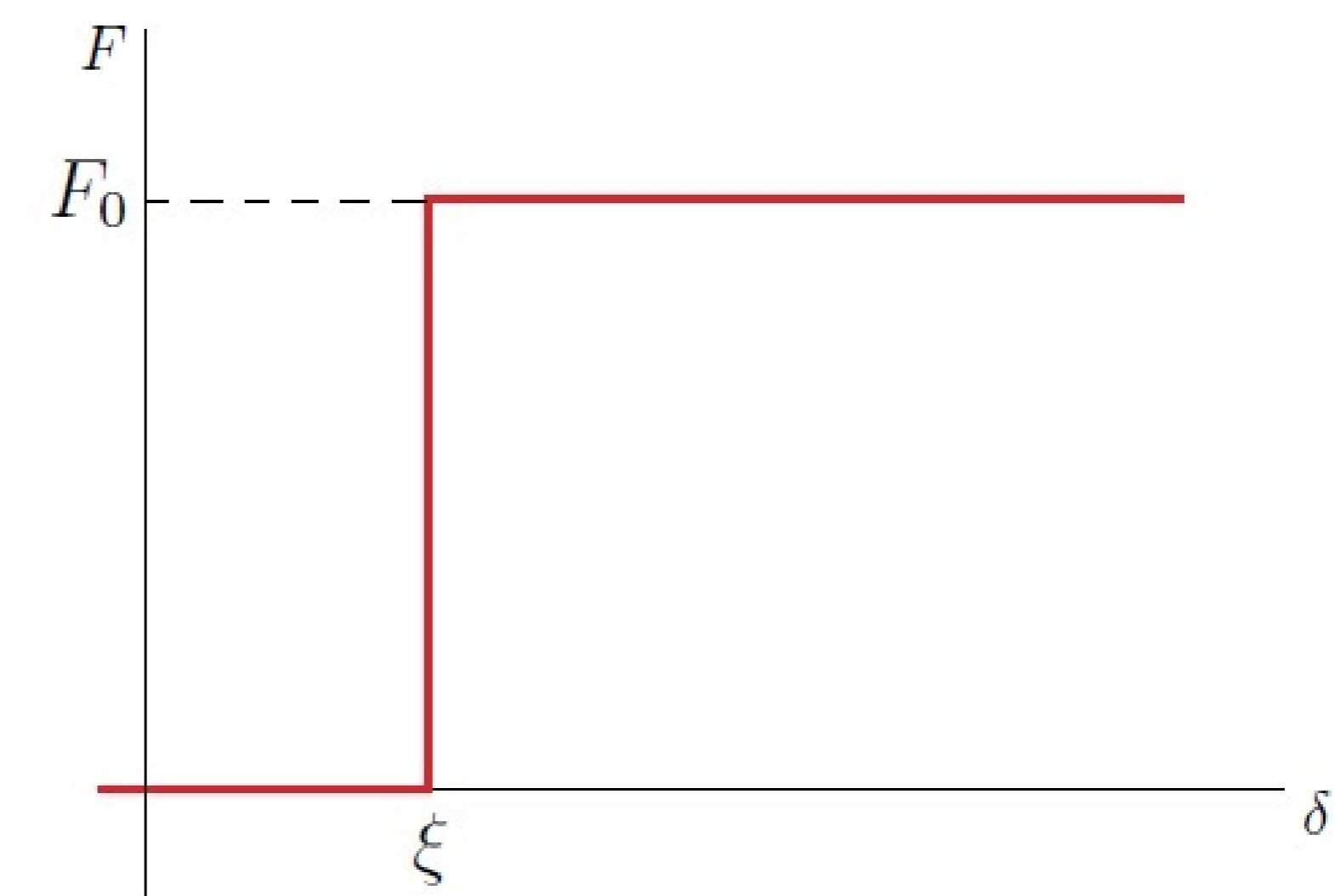


Figura 3: Força constante entre as esferas. Vemos que F_0 começa a agir a partir de um certo valor $\delta \geq \xi$.

Analogamente à primeira parte, pudemos generalizar a coordenada q_j como a posição entre duas esferas vizinhas, dada por:

$$q_j = x_j - x_{j+1} + 2R \quad (6)$$

com $j = 1, 2, \dots, n-1$, n é o número de bolinhas, R o raio e x_j é a posição da j -ésima esfera. Assim, teremos um sistema composto por $n-1$ equações diferenciais acopladas e, conseqüentemente, $n-1$ gráficos do movimento a serem analisados.

Para o caso particular da interação entre três esferas consideramos a equação (3). Neste caso, a esfera 1 está com velocidade constante v e incide na direção das outras duas, inicialmente em repouso. Após as esferas 1 e 2 estarem a uma distância ξ , a força F_0 começa a agir. Contudo, as esferas 2 e 3 também entram em contato. A situação é dada, portanto, pela ação simultânea das três esferas pela força F_0 . Concluímos que, para $\xi = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{F_0}$, o sistema se comporta como dois subsistemas isolados: para $t \leq t_2$, apenas as esferas 1 e 2 interagem, enquanto que para $t \geq t_2$, há interação somente entre as esferas 2 e 3, onde t_2 é o instante de tempo no qual $b(t)$ ($= q_2(t)$, equação (6) com $j = 2$) passa por ξ . Assim, temos colisões binárias e, portanto, as velocidades finais são: $\dot{x}_{1final} = \dot{x}_{2final} = 0$ e $\dot{x}_{3final} = v$.

Conclusões

Em suma, pudemos reproduzir o artigo [2] de modo a compreender o funcionamento dos sistemas físicos da mecânica das colisões. Além disso, fomos capazes de generalizar o Berço de Newton para um sistema composto por n esferas, com o auxílio do *Mathematica*. Além disso, esboçamos os gráficos para cada equação do movimento em função do tempo. Posteriormente, generalizamos a análise para n esferas.

Referências Bibliográficas

- MARION, Jerry B.; THORNTON, Stephen T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Belmont, Calif. (2004).
- SEKIMOTO, Ken, *Newton's Cradle versus Nonbinary Collisions*, Physical Review Letters, 26.03.10.
- HERRMANN, F.; SEITZ, M., *How does the ball-chain work?*, American Association of Physics Teachers (1982).

Apoio