ANÉIS E ÁLGEBRAS

JOÃO FERNANDO SCHWARZ RA091670

Orientador: Plamen Kochloukov
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
CNPq
Palavras-Chave: Grupos-Álgebras-Identidades Polinomiais

Definição 1. Seja $\langle V, +\rangle$ um espaço vetorial sobre um corpo K, e $* : V \times V \to V$ uma função binária (sugestivamente chamada de *multiplicação*). Então a tripla $\langle V, +, *\rangle$ (ou mais simplesmente V) é chamada de *álgebra (linear) sobre* K se:

- $a * (b + c) = a * b + a * c$ e $(b + c) * a = b * a + c * a \quad \forall a, b, c \in V$
- $\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b) \quad \forall a, b \in V, \forall \lambda \in K$

Definição 2. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra associativa. $f = 0$ (ou apenas f) é uma *identidade polinomial* para R se $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$, $\forall r_1, \ldots, r_n \in R$. Se R for uma álgebra associativa e satisfazer uma identidade polinomial não trivial ($f \neq 0$), chamamos R de uma *PI-álgebra*.

Teorema 1. *Seja $E(V)$ uma álgebra de Grassmann sobre um corpo de característica 0. Se $\dim V = \infty$, então $[x_1, x_2, x_3]$ é uma base para $T(E(V))$. Se $\dim V = n$, então $[x_1, x_2, x_3]$ e $s_{2p}(x_1, \ldots, x_{2p})$, onde p é o menor natural tal que $2p > n$, são uma base para $T(E(V))$.*

Teorema 2. *Seja K um corpo de característica 0. Então a identidade*

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

forma uma base para as identidades polinomiais de $U_n(K)$.

Teorema 3. (Amitsur-Levitzki) $s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ *é identidade polinomial para* $M_n(K)$.

Teorema 4 (Regev)**.** *Seja R uma PI-álgebra com uma identidade polinomial de grau d. Então a sequência das codimensões satisfaz a desigualdade $c_n(R) \leq (d - 1)^{2n}, n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Teorema 5. (Regev) *O produto tensorial $R = R_1 \otimes R_2$ de duas PI-álgebras R_1 e R_2 também é uma PI-álgebra.*

Referências

[1] P. J. Cameron, *Introduction to Algebra*, 1998, Oxford University Press.
[2] I. N. Herstein, *Topics In Algebra*, 1975, Wiley & Sons.
[3] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, 2000, Springer.
[4] L. H. Rowen, *Polinomial Identities in Ring Theory*, 1980, Academic Press.
[5] C. Procesi, *Rings with Polynomial Identities*, 1973, Marcel Dekker, Inc.