Faculdade de Ciências Aplicadas

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Uma heurística precondicionadora para métodos iterativos da classe split

Título da IC: "Métodos Numéricos para Resolução de Sistemas Lineares Esparsos: uma Investigação Introdutória"

Aluno: Mateus Pereira Martin
Prof. Dr. Cristiano Torezzan

Agência de Financiadora: CNPq
PIBIC/UNICAMP

Palavras-Chave: Sistemas Lineares-Métodos Diretos-Métodos Iterativos

Introdução

Diversos problemas de engenharia e matemática aplicada recaem na resolução de sistemas lineares. Exemplos desses problemas são oriundos de sistemas de potência, monitoramento e previsão do tempo, otimização, entre outros. Neste trabalho propomos uma heurística precondicionadora para métodos iterativos da classe split, com o intuito de melhorar a convergência dos métodos quando aplicados na resolução de sistemas lineares.
Um sistema linear de n equações e n incógnitas pode ser escrito na forma:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \quad (1)$$

Resumo do projeto de IC:

- Métodos diretos para sistemas lineares: LU, QR e Cholesky
- Métodos iterativos para sistemas
- Contribuição adicional: Heurística Precondicionadora

Métodos Iterativos

Os métodos iterativos permitem aproximar a solução de um sistema linear a partir de um vetor inicial. Eles podem ser úteis, principalmente no caso de matrizes esparsas, aquelas cuja maioria de seus elementos são iguais a zero. Há de se destacar a vantagem de reduzir armazenamento da matriz, bem como evitar os problemas de instabilidade numérica (relativamente aos métodos diretos). Os Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são famosos métodos da classe Split. Os métodos dessa classe consistem na partição da matriz de dados A de maneira a obter sistemas lineares de fácil resolução com matrizes de iteração M mais simples que A.

Método de Jacobi

$$\begin{gathered} M = D^{-1}(L+U) \\ w = D^{-1}b \\ x^{k+1} = Mx^k + w \end{gathered} \quad (2)$$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{gathered} M = (L+D)^{-1}(U) \\ w = (L+D)^{-1}b \\ x^{k+1} = Mx^k + w \end{gathered} \quad (3)$$

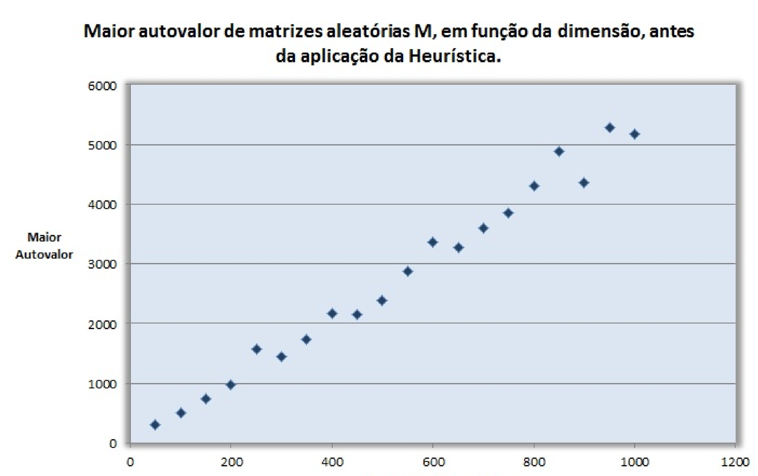
Critérios de Convergência:

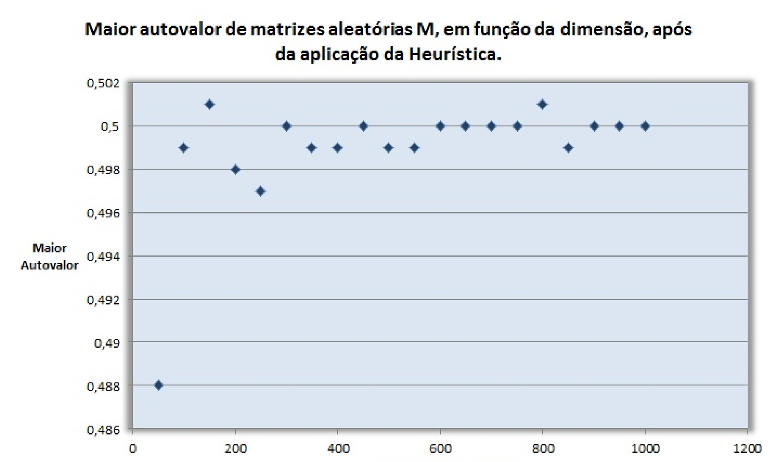
- $\rho(M) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda| < 1$
- Matriz Diagonalmente Dominante $\rightarrow \rho(M) < 1$

A Heurística e Resultados

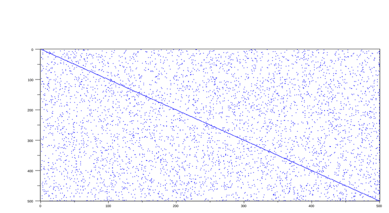
- Reordenamento de linhas e colunas a partir dos maiores elementos nas sub-matrizes de A.

```
function [z]=Heuristica(A,n)
    z = A;
    for i=1:(n-1)
        [k,p] = max(z(i:n,i:n));
        p = p+i-1;
        c = 1:n;
        c(i) = p(2);
        c(p(2)) = i;
        l = 1:n;
        l(i) = p(1);
        l(p(1)) = i;
        z = z(l,c);
    end
endfunction
```

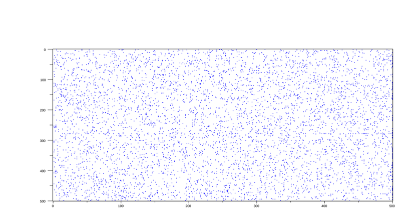




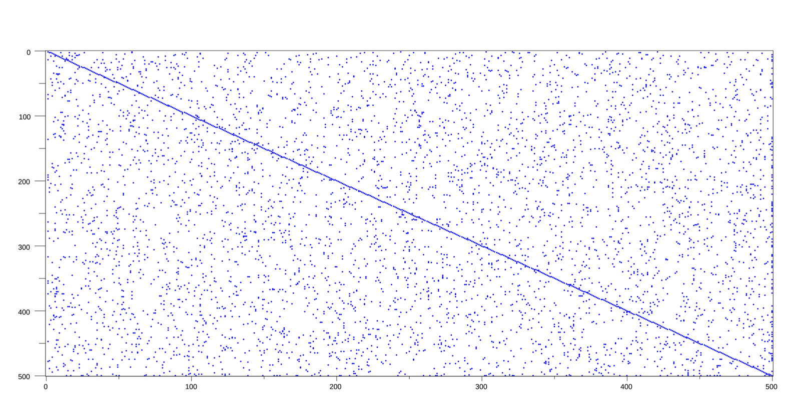
Gráficos gerados no Scilab-5.3.3: Comando PlotSparse



Matriz Esparsa (g=98%, n=500) com diagonal dominante



Matriz Embaralhada Aleatoriamente



Resultado após a Heurística

Conclusão

Os resultados encontrados foram bastante satisfatórios, observamos que a heurística reordena a matriz de dados A de tal maneira que a mesma apresenta o mesmo autovalor máximo de uma situação ideal de dominância na diagonal, isto é, existindo um arranjo ideal ótimo, a heurística é capaz de reordenar a matriz a fim de chegar nesse arranjo. Apesar dos resultados alcançados serem satisfatórios, cabe ressaltar que os testes numéricos ainda podem ser melhorados, incluindo, por exemplo, matrizes oriundas de problemas reais.

Referências

[1] Carmo, Fernanda Cristina do. *Análise da Influência de Algoritmos de Reordenação de Matrizes Esparsas no Desempenho do Método CCCG(n).* Tese de mestrado ICE/UFMG (2005).

[2] Ruggiero, Márcia A. G.; Lopes, Vera L. da Rocha. *Cálculo Numérico - aspectos teóricos e computacionais.* 2. ed. São Paulo: Editora Makron Books, 1996. 406p.

[3] Watkins, David S. *Fundamentals of Matrix Computations.* 2ł ed., Wiley Publication, 2002. p. 1 a 106.