Simulação de Guias Fotônicos Planares e Fibras Ópticas via Elementos Finitos 2D

Marcelo C. Diez (Bolsista), Prof.ª Dr.ª Marli de F. G. Hernández e Prof. Dr. Hugo E. Hernández Figueroa(Orientador)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE TECNOLOGIA

PIBIC/CNPq

Palavras Chaves: Guias Fotônicos – Método dos Elementos Finitos – MATLAB

Introdução

Na área de comunicações ópticas os guias de onda são componentes cruciais para o processamento dos sinais ópticos. Muitos destes dispositivos podem ser simplificados. Porém, mesmo com essa simplificação, o cálculo analítico dos campos eletromagnéticos é uma tarefa pouco prática e bastante tediosa. Faz-se necessário, portanto, o uso de métodos numéricos eficientes sendo os mais usados o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF).

Este projeto visa à aplicação do MEF para realização da simulação e análise de guias fotônicos planares e fibras ópticas.

Metodologia

A primeira parte do trabalho consistiu na familiarização com as formulações de Galerkin e Rayleigh-Ritz (ou variacional) e nos primeiros contatos com os algoritmos em linguagem MATLAB para a resolução de problemas pelo MEF.

Na segunda parte, seriam realizadas simulações de guias fotônicos planares e fibras ópticas no MatLab, mas a iniciação foi cancelada a partir do relatório parcial devido a alguns problemas.

Serão apresentados os resultados da primeira parte apenas.

Resultados

Formulação de Galerkin

Considere o problema

$$Lu = f, \qquad u \in V(\Omega) \qquad (1)$$

Onde u é a incógnita, f representa uma função de excitação, L é um operador linear DIFERENCIAL, e V é um espaço vetorial de funções definidas sobre o domínio Ω.

L mapeia o espaço V num conjunto de funções S, o qual constitui um espaço vetorial, tal que V está contido em S.

Definindo o operador residual como sendo $Ru = Lu - f$ (2), e o produto escalar interno $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f \cdot g * d\Omega$ (3), chegamos a Formulação de Gallerkin:

$$\boxed{\text{Achar } u = \tilde{u} \text{ em } V(\Omega) \mid \langle R\tilde{u}, w\rangle = 0\ \forall\, w \in W(\Omega) \subseteq V(\Omega)}$$

Indo mais além, e considerando $W = V$, temos:

$$\boxed{\text{Achar } u = \tilde{u} \text{ em } V(\Omega) \mid \langle R\tilde{u}, w\rangle = 0\ \forall\, w \in V(\Omega)}$$

Formulação Variacional (Rayleigh-Ritz)

Novamente tomando como ponto inicial o problema (1), e usando (3), se L for auto adjunto (AA) e positivo definido (PD), então a solução pode ser obtida encontrando o valor estacionário do funcional dado por:

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, f\rangle - \frac{1}{2}\langle f, u\rangle \qquad (4)$$

Para encontrarmos tal ponto, devemos tomar a primeira variação do funcional, dada por:

$$\delta F(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon \delta u) - F(u)}{\varepsilon} \qquad (5)$$

Após simplificações, chegamos a $\delta F = \mathrm{Re}\{\langle Lu - f, \delta u\rangle\}$ (6). A condição estacionária é $\delta F = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{\langle Lu - f, \delta u\rangle\} = 0$. Como δu é arbitrário, temos: $L\tilde{u} - f = 0$. (Equação de Euler do funcional).

Elementos Finitos 2D

Discretizamos um domínio bidimensional em subespaços de dimensão finita, por meio de funções de interpolação. Se forem usados elementos triangulares, a função interpoladora φ para cada elemento pode ser aproximada por:

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \qquad (7)$$

Existe um valor da função para cada nó do elemento. Resolvendo as constantes a^e, b^e e c^e em termos de $\phi_j^e, j = 1, 2{,}3$, e substituindo em (7), temos:

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^{3} N_j^e(x, y)\phi_j^e \qquad (8)$$

A função de interpolação N_j^e tem a propriedade de possuir valor unitário em seu próprio nó, e valor nulo nos demais nós, assim como a função Delta de Kronecker. Portanto, ϕ^e se reduz ao seu valor nodal ϕ_i^e no nó i. Podemos então usar a formulação de Galerkin ou a de Rayleigh-Ritz para formular o sistema de equações.

Algoritmo para elementos finitos

Um algoritmo possível a para a execução da análise de um problema é dado a seguir:

a) Definir/calcular o número de nós do domínio e sua numeração global;
b) Definir/calcular o número de elementos;
c) Definir/calcular as conexões dos elementos (nós pertencentes a cada elemento);
d) Usar uma função auxiliar para montar as matrizes $[K^e]$ e $\{b^e\}$, tomando como base a equação característica para o tipo de elemento, sua numeração global e sua numeração local.
e) Impor condições de contorno no sistema matricial;
f) Resolver o problema usando um método de solução de sistemas lineares.

Conclusão

O método dos elementos finitos é uma poderosa ferramenta de cálculo, que reduz em muito o tempo de processamento, além de apresentar resultados próximos a realidade.