

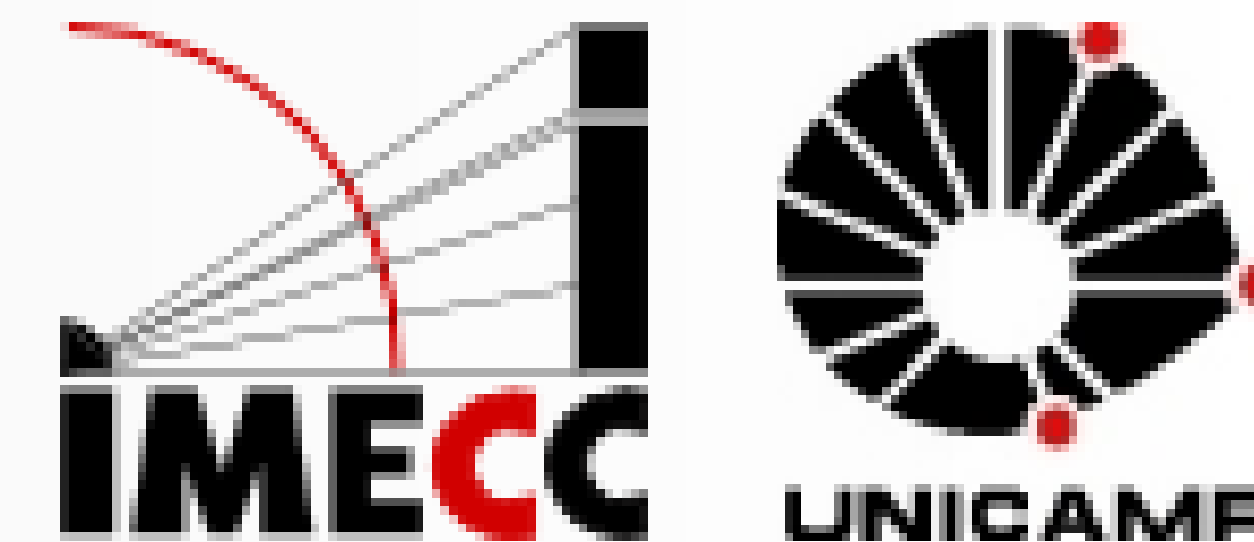
MINIMIZAÇÃO IRRESTRITA USANDO GRADIENTES CONJUGADOS E REGIÕES DE CONFIANÇA

John Lenon C. Gardenghi

Profa. Dra. Sandra Augusta Santos

infor.john@gmail.com

sandra@ime.unicamp.br



Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq

Palavras-chave: Gradientes conjugados – Regiões de confiança – Minimização irrestrita.

Introdução

Para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, suave e ao menos duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n , consideramos o problema de resolver o caso geral de minimização irrestrita:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

aplicando o método de Regiões de Confiança e Gradientes Conjugados (GC) para gerar uma sequência de iterandos $\{x_k\}$ [3, 4].

O método de GC

O método de Gradientes Conjugados é uma estratégia iterativa, de direções conjugadas, para resolução de sistemas de equações lineares:

$$Ax = b, \quad (2)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e positiva definida. O problema (2) pode ser visto, do ponto de vista de otimização, como o problema de minimização quadrática:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, \quad (3)$$

visto que (2) é condição de otimalidade de primeira ordem, necessária e suficiente do problema (3).

GC e Regiões de Confiança

A conexão entre o método de GC e a estratégia de Regiões de Confiança foi proposta por Steihaug [4]. O algoritmo de GC será usado na resolução do subproblema de região de confiança para computar o passo p tal que $x_{k+1} = x_k + p$:

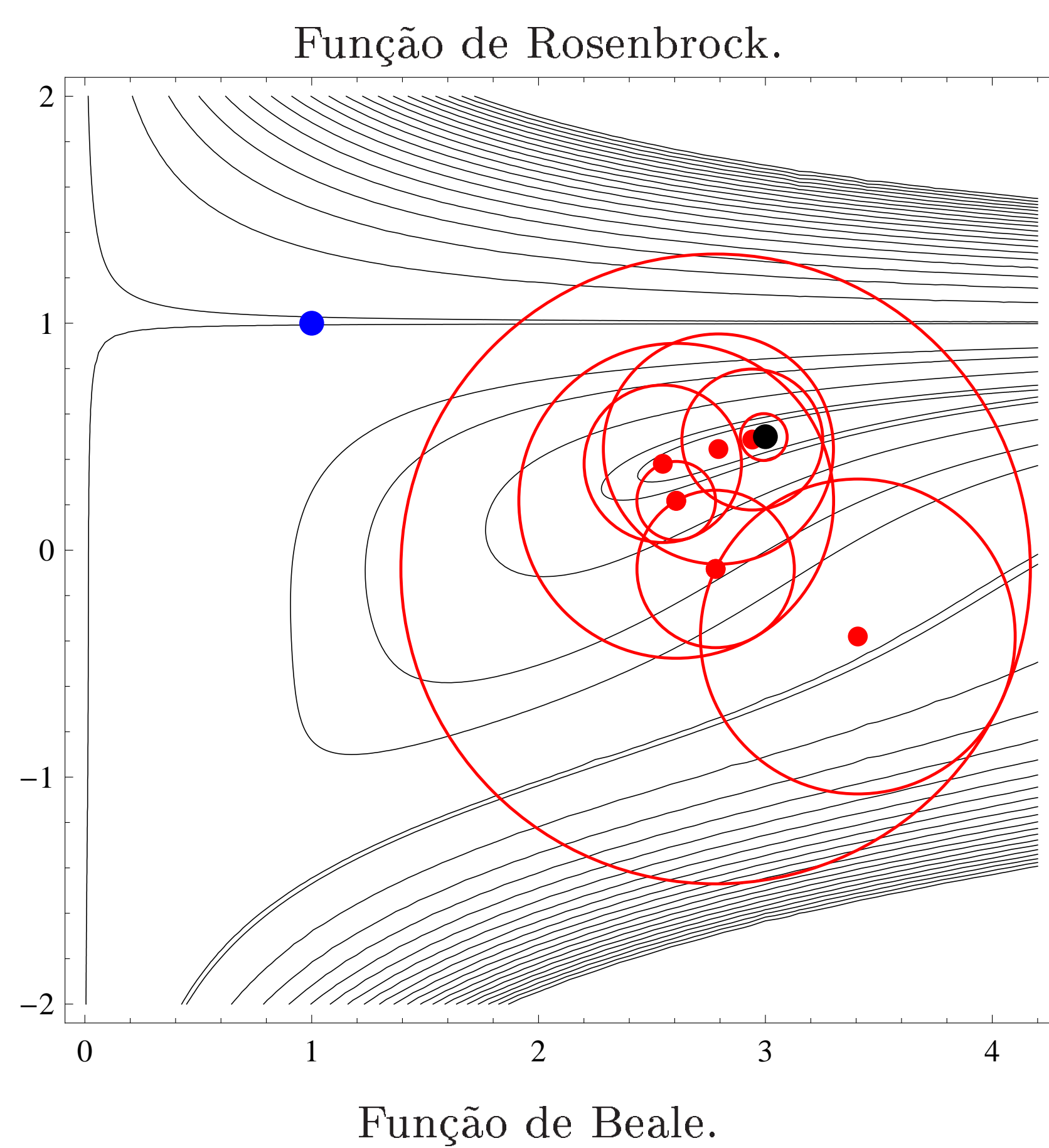
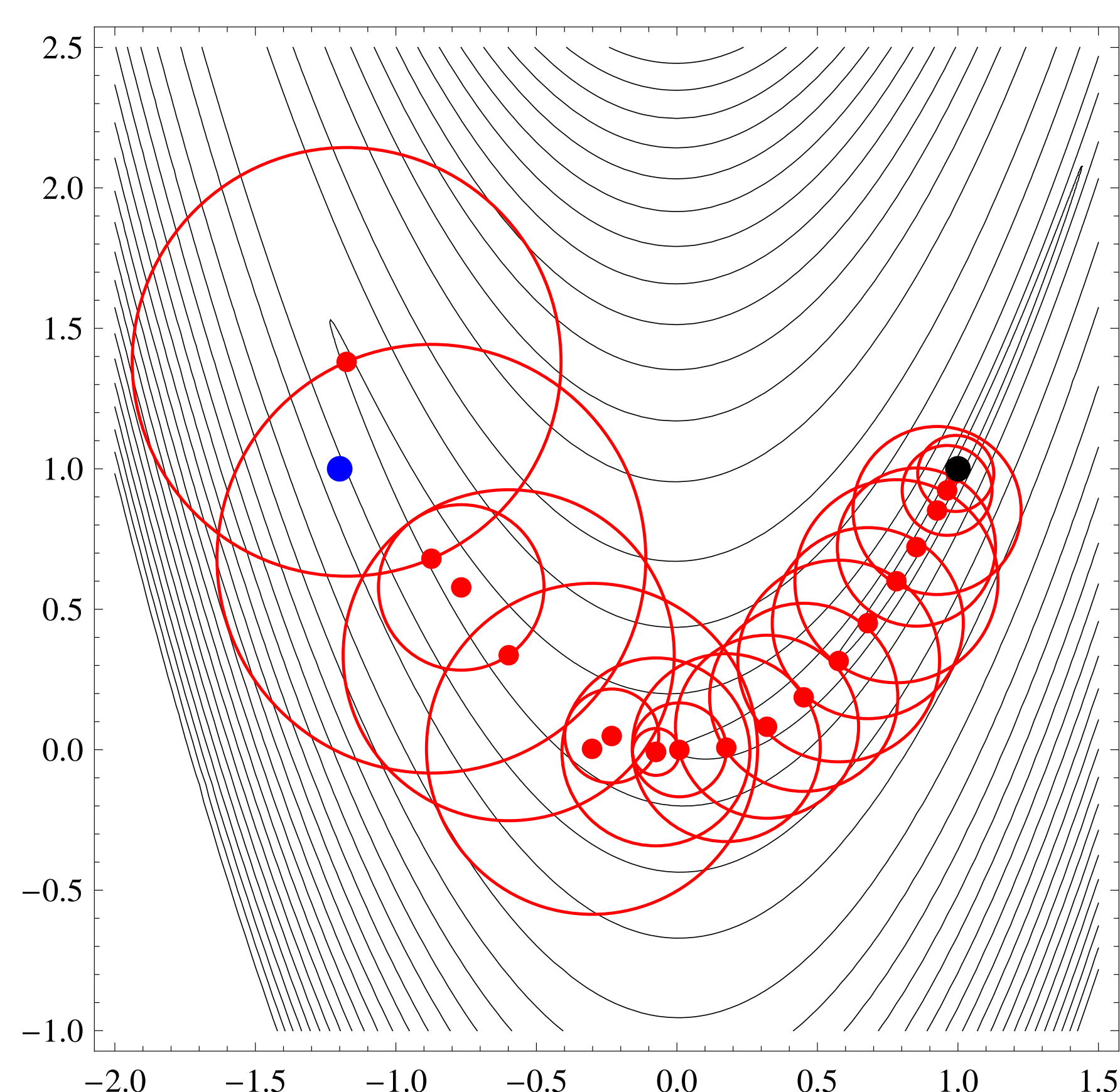
$$\begin{aligned} \min q(p) &= \frac{1}{2}p^T H_k p + g_k^T p \\ \text{s.a. } \|p\| &\leq \Delta_k, \end{aligned} \quad (4)$$

onde $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz hessiana, $g_k \in \mathbb{R}^n$ é o gradiente da função objetivo avaliados no ponto corrente x_k e Δ_k é o raio da região de confiança. Se H_k for definida positiva, então o algoritmo de GC pode ser utilizado em sua forma original; caso contrário, o modelo pode produzir uma direção de curvatura negativa, basta então encontrar um passo que atinja a borda da região de confiança, daí a sua utilidade.

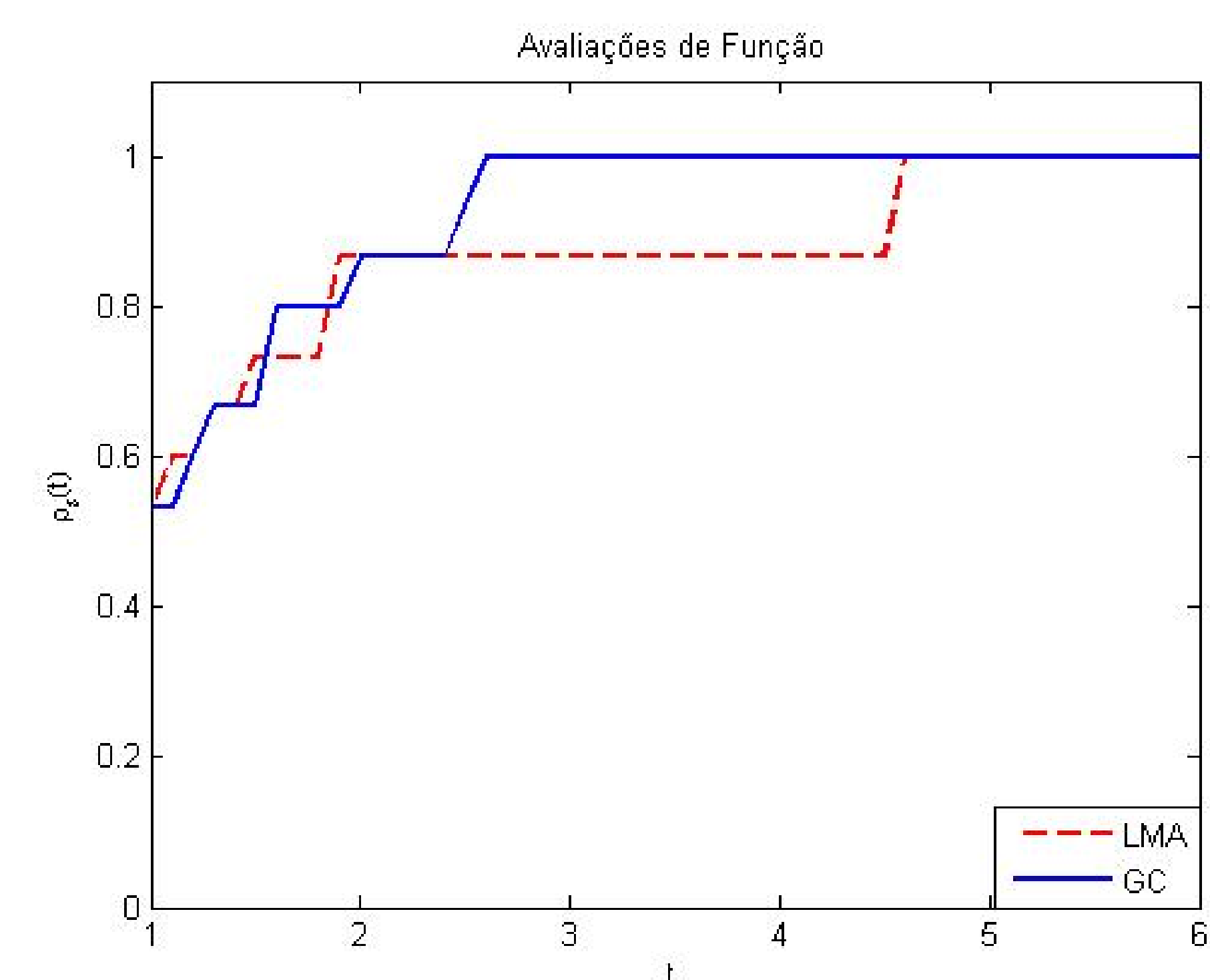
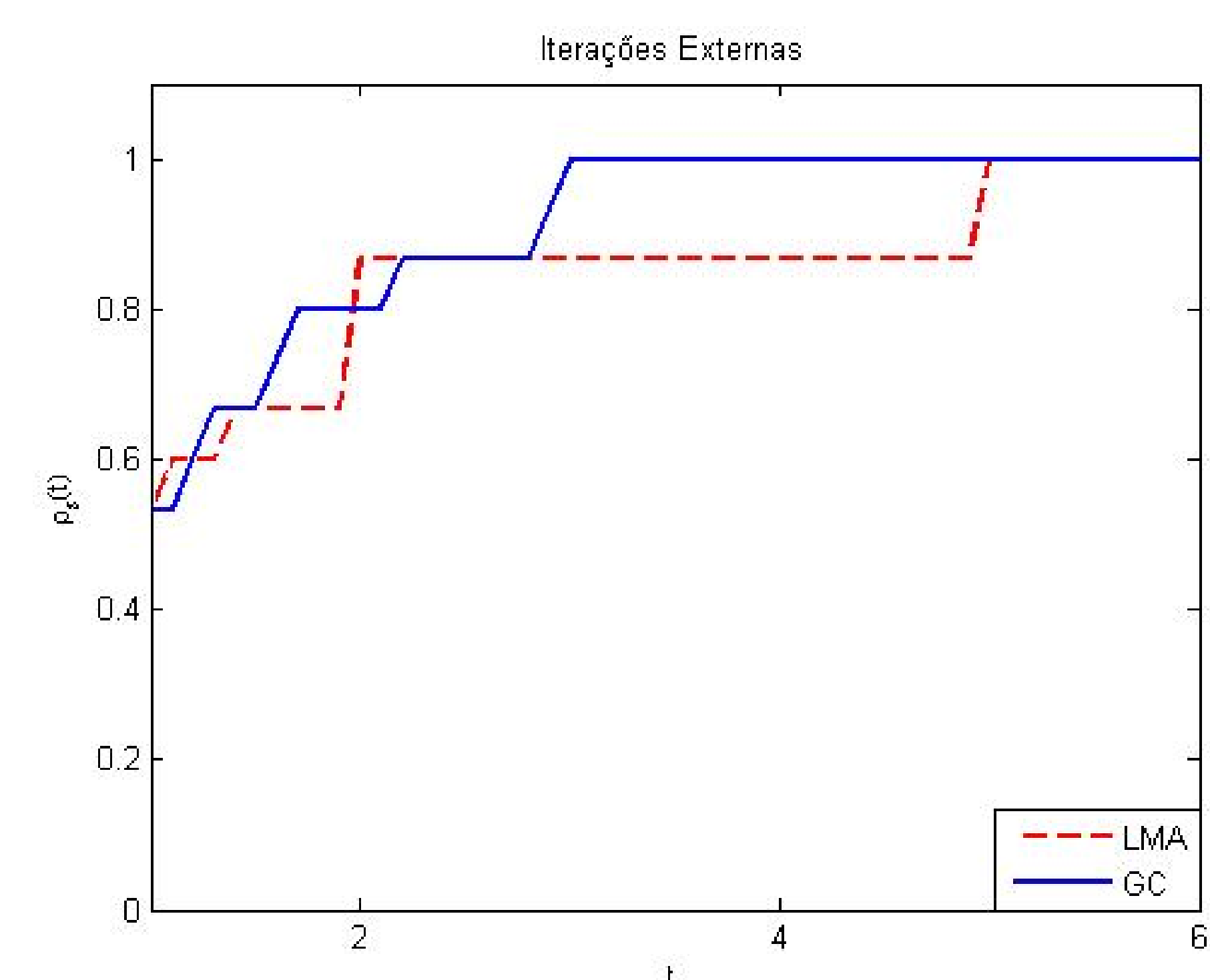
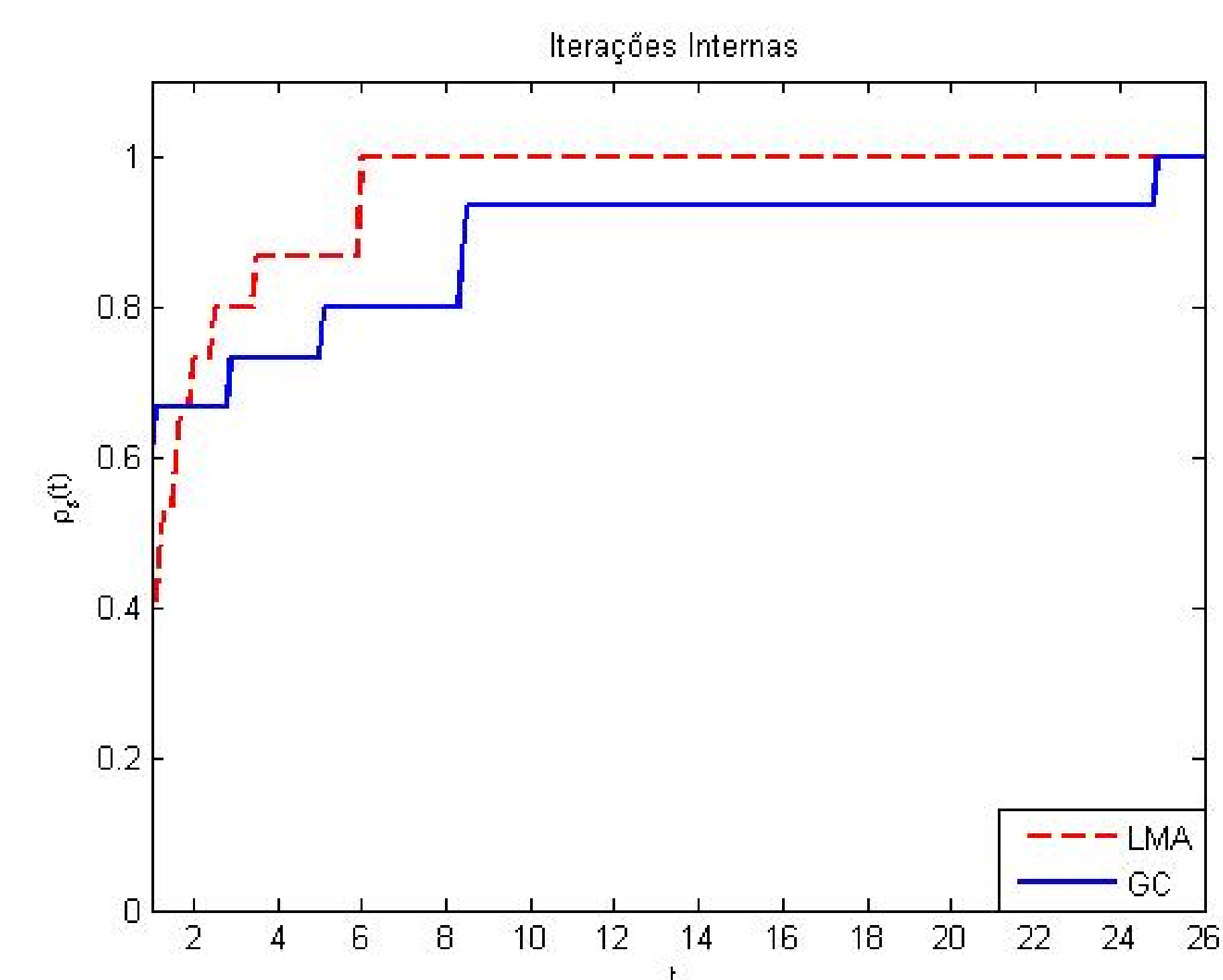
Metodologia

Neste trabalho, fizemos o estudo e implementação de um método de região de confiança usando gradientes conjugados para resolver o problema (1). Para avaliar a confiabilidade e robustez do algoritmo, testamos problemas propostos em [2]. Neste contexto, comparamos o desempenho deste algoritmo com aquele desenvolvido em [1], tomando alguns problemas de quadrados mínimos como problemas de minimização irrestrita para base de comparação.

GC e Regiões de Confiança



Análise de Desempenho



Conclusões

O método de GC original possui a característica teórica de resolver sistema linear $n \times n$ em no máximo n iterações. Combinado à estratégia de região de confiança para minimização irrestrita, o desempenho de GC na resolução dos subproblemas quadráticos foi satisfatório no conjunto de problemas analisados. A região de confiança foi fundamental para a boa definição e convergência da sequência gerada. Em comparação com LMA, o método estudado mostrou-se competitivo: embora exija mais iterações internas, ele se sobressai nos demais quesitos analisados.

Referências

- [1] J.L.C. Gardenghi & S.A. Santos. "Sistemas não lineares via região de confiança: o algoritmo de Levenberg-Marquardt". 2011. 45 pp. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2011/pdf/rp03-11.pdf. Último acesso em 16/10/2011.
- [2] J.J. Moré, B.S. Garbow & K.E. Hillstom. "Testing unconstrained optimization software", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Volume 7, pp. 17-41, 1981.
- [3] J.R. Shewchuk. *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Edition 1 $\frac{1}{4}$. 1994. School of Computer Science. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 58p. Disponível em <http://www.cs.cmu.edu/quakepapers/painless-conjugate-gradient.pdf>. Último acesso em 16/10/2011.
- [4] T. Steihaug. "The conjugate gradient method and trust region in large scale optimization". *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Volume 20(3), pp. 626-637, 1983.