A FUNÇÃO DE GREEN E AS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Ana Luisa Soubhia

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - IMECC - UNICAMP
soubhia@ime.unicamp.br

Edmundo Capelas de Oliveira

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - IMECC - UNICAMP
capelas@ime.unicamp.br

Agência Financiadora: PIBIC - UNICAMP

Palavras-chave: Função de Green, Equações Integrais, Função de Mittag-Leffler

Objetivo

Estudar as equações integrais dos tipos Fredholm e Volterra. Como aplicação, discutir o problema do oscilador harmônico clássico [1], bem como estender a solução para o chamado problema do oscilador fracionário [2] de onde emerge naturalmente a função de Mittag-Leffler [2,3].

Função de Green

Introduzir o conceito de função de Green, bem como a sua construção, no caso unidimensional, através de duas metodologias: o chamado método de Burkhardt, por questões históricas, e o chamado método de Sturm-Liouville [4].

Conforme Burkhardt, a partir da equação diferencial ordinária de segunda ordem,

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x),$$

emprega-se a metodologia de duas quadraturas (integrais) justapostas.

Sejam o intervalo $[a,b]$ e $u(a) = 0 = u(b)$. Integrando duas vezes e usando o resultado

$$\int_{x_0}^{x} d\eta \int_{x_0}^{\eta} f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x}(x-\xi)f(\xi)d\xi, \qquad (1)$$

obtemos

$$u(x) = -\int_a^b G(x|\xi)f(\xi)d\xi. \qquad (2)$$

onde a chamada de função de Green é dada por

$$G(x|\xi) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(x-a)(b-\xi), & a \le x \le \xi \\ (b-x)(\xi-a), & \xi < x \le b.\end{cases}$$

Passamos, agora, para o método de Sturm-Liouville. Seja L o operador atuando na função $y(x)$

$$Ly(x) = \frac{d^2}{dx^2}y(x) + a\frac{d}{dx}y(x) + by(x),$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

A função de Green é solução da equação diferencial não-homogênea cujo termo de não-homogeneidade é a distribuição delta de Dirac $\delta(x-\xi)$.

Com o mesmo operador L, atuando na função de Green, no intervalo $x_0 \le x \le x_1$, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x|\xi) + a\frac{d}{dx}G(x|\xi) + bG(x|\xi) = -\delta(x-\xi).$$

Resolvendo a respectiva equação homogênea, obtemos duas soluções linearmente independentes, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ e com solução geral dada por

$$y(x) = A(\xi)y_1(x) + B(\xi)y_2(x),$$

onde A e B não são funções da variável x. Vamos procurar soluções na forma:

$$G(x|\xi) = \begin{cases}A(\xi)y_1(x), & x < \xi \\ B(\xi)y_2(x), & x > \xi\end{cases} \qquad (3)$$

onde $y_1(x)$ satisfaz a condição no extremo x_0 e $y_2(x)$ satisfaz a condição no extremo x_1.

A função de Green, $G(x|\xi)$, é tal que:

(i) É contínua em $x = \xi$,

$$A(\xi)y_1(\xi) = B(\xi)y_2(\xi). \qquad (4)$$

(ii) A derivada primeira tem descontinuidade de salto

$$\frac{d}{dx}G(x^+|\xi)|_{x=\xi^+} - \frac{d}{dx}G(x^-|\xi)|_{x=\xi^-} = \frac{-1}{p(\xi)}, \qquad (5)$$

onde $G(x^+|\xi)$ indica a derivada em relação a x pela direita de ξ, $G(x^-|\xi)$ indica a derivada em relação a x pela esquerda de ξ e $p(\xi)$ é uma função tal que a equação possa ser conduzida na chamada forma de Sturm-Liouville, a saber

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] = g[x, y(x)].$$

Pela equação (5), obtemos:

$$B(\xi)y_2'(\xi) - A(\xi)y_1'(\xi) = \frac{-1}{p(\xi)}, \qquad (6)$$

onde o símbolo $(')$ representa derivadas.

(iii) y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea.

A partir das equações (4) e (6), obtemos o sistema para $A(\xi)$ e $B(\xi)$, cuja solução é

$$A(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} \quad \text{e} \quad B(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)},$$

onde $W(\xi)$ é o wronskiano de y_1 e y_2 calculado em $x = \xi$.

Explicitamente, pela equação (3), podemos escrever a função de Green através da expressão

$$G(x|\xi) = \begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & x < \xi \\ \dfrac{y_2(x)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & x > \xi.\end{cases} \qquad (7)$$

Equações de Volterra e Fredholm

Primeiramente vamos converter o problema composto por uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, não-homogênea e com condições iniciais num problema envolvendo uma equação integral do tipo de Volterra.

Considerando a equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + P(x)\frac{d}{dx}u(x) + Q(x)u(x) = F(x), \qquad (8)$$

com $P(x), Q(x)$ e $F(x)$ funções reais conhecidas e $u(x)$ a função a ser determinada, com condições iniciais dadas em $x = x_0$, isto é, $u(x_0) = A$ e $u'(x_0) = B$ sendo A e B constantes conhecidas. Isolando o termo de derivada segunda e integrando duas vezes, temos

$$\begin{aligned}u(x) = &-\int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi + \\ &+ (x-\xi)\left[Q(\xi) - \frac{d}{d\xi}P(\xi)\right]u(\xi)d\xi + \\ &+ \int_{x_0}^{x}(x-\xi)F(\xi)d\xi + [P(x_0)A + B](x-x_0) + A.\end{aligned}$$

Introduzindo a notação

$$\varphi(x,\xi) \equiv (\xi - x)\left[Q(\xi) - \frac{d}{d\xi}P(\xi)\right] - P(\xi)$$

e

$$f(x) \equiv \int_{x_0}^{x}(x-\xi)F(\xi)d\xi + [P(x_0)A + B](x-x_0) + A,$$

obtemos, uma equação integral do tipo Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x}\varphi(x,\xi)u(\xi)d\xi. \qquad (9)$$

Vamos, agora, conduzir um problema de Sturm-Liouville numa equação integral do tipo Fredholm. Seja a equação diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + q(x)u(x) = \lambda u(x) + F(x) \qquad (10)$$

com $x_0 \le x \le x_1$. Primeiramente integramos a equação (10), logo

$$p(x)\frac{d}{dx}u(x) + \int_{x_0}^{x} q(\xi)u(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x}[\lambda u(\xi) + F(\xi)]d\xi + p(x_0)u'(x_0).$$

Multiplicando a expressão anterior por uma função $y'(x)$, integrando mais uma vez e utilizando a equação (1), obtemos

$$\begin{aligned}&p(x)[y'(x)u(x) - y(x)u'(x)] + \\ &p(x_0)[y(x_0)u'(x_0) - y'(x_0)u(x_0)] + \\ &+ \int_{x_0}^{x} y(\xi)[\lambda u(\xi) + F(\xi)]d\xi = 0.\end{aligned} \qquad (11)$$

Em analogia a equação para $y(x)$, vamos integrar a equação (10) de x até $x = x_1$, em seguida, multiplicamos a equação resultante por uma função $z'(x)$, tal que $z(x)$ satisfaça a respectiva equação homogênea, de onde segue-se

$$\begin{aligned}&p(x)[z'(x)u(x) - z(x)u'(x)] + \\ &p(x_1)[z(x_1)u'(x_1) - z'(x_1)u(x_1)] - \\ &- \int_{x_0}^{x} z(\xi)[\lambda u(\xi) + F(\xi)]d\xi = 0.\end{aligned} \qquad (12)$$

Multiplicando a equação (11) por $z(x)$, a equação (12) por $y(x)$ e subtraindo uma da outra, temos

$$\begin{aligned}&p(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]u(x) + \\ &p(x_0)[y(x_0)u'(x_0) - y'(x_0)u(x_0)]z(x) + \\ &p(x_1)[z'(x_1)u(x_1) - z(x_1)u'(x_1)]y(x) + \\ &C\int_{x_0}^{x_1} G(x|\xi)[\lambda u(\xi) + F(\xi)]d\xi = 0,\end{aligned}$$

onde utilizamos a notação, com C constante,

$$G(x|\xi) = \frac{1}{C}\begin{cases}y(\xi)z(x), & x_0 \le \xi \le x \\ y(x)z(\xi), & x \le \xi \le x_1.\end{cases} \qquad (13)$$

De modo a simplificar, impomos as condições

$$y(x_0)u'(x_0) - y'(x_0)u(x_0) = 0$$

$$z(x_1)u'(x_1) - z'(x_1)u(x_1) = 0$$

que, quando substituídas na equação anterior, fornecem para $u(x)$

$$u(x) = \frac{C}{p(x)W[y,z]}\int_{x_0}^{x_1} G(x|\xi)[\lambda u(\xi) + F(\xi)]d\xi$$

onde $W[y,z]$ é o wronskiano, logo

$$u(x) = \lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x|\xi)u(\xi)d\xi + f(x), \qquad (14)$$

sendo $f(x) \equiv \int_{x_0}^{x_1} G(x|\xi)F(\xi)d\xi$. Esta é uma equação integral do tipo Fredholm.

Como aplicação vamos discutir o problema do oscilador harmônico, isto é, a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + w^2u(x) = \mu(x)$$

com $x > 0$, w é a freqüência e $\mu(x)$ uma força externa. Vamos conduzir esta equação à sua correspondente equação integral, dos tipos Volterra e Fredholm. Seja, a partir de agora, $\mu(x) = 0$.

Para conduzir o problema à uma equação integral do tipo Volterra, admitamos as condições iniciais: $u(0) = u_0 \neq 0$ e $u'(0) = 0$.

Substituindo estes valores na equação (9), obtemos

$$u(x) = u_0 - w^2\int_0^x (x-\xi)u(\xi)d\xi, \qquad (15)$$

que é uma equação integral do tipo Volterra.

Por outro lado, para conduzir o problema à uma equação integral do tipo Fredholm, impomos as condições contorno: $u(0) = 0 = u(a)$. Substituindo esses valores na equação (14), obtemos

$$u(x) = -w^2\int_0^a G(x|\xi)u(\xi)d\xi$$

onde $G(x|\xi)$, é

$$G(x|\xi) = \frac{1}{a}\begin{cases}x(a-\xi), & 0 \le \xi \le x \\ \xi(a-x), & x \le \xi \le a\end{cases}$$

que é uma equação integral do tipo Fredholm.

Oscilador Harmônico Fracionário

Como uma extensão desta aplicação, discutimos o oscilador harmônico fracionário. A equação (15) é uma equação integral de Volterra, que pode ser generalizada de modo que tenhamos

$$u(t) = u_0 - \frac{w^2}{\Gamma(\mu)}\int_0^t (t-\xi)^{\mu-1}u(\xi)d\xi, \qquad (16)$$

com $1 < \mu \le 2$ e $\Gamma(\mu)$ é a função gama [1]. Note que para $\mu = 2$ recuperamos a equação (15).

Para resolvermos a equação (16) utilizamos a transformada de Laplace e assim, obtemos uma equação algébrica, cuja solução é dada por

$$F(s) = u_0\frac{s^{-1}}{1 + ws^{-\mu}},$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $u(t)$. Para recuperarmos a função $u(t)$, solução da equação integral associada ao problema do oscilador harmônico fracionário, calculamos a transformada de Laplace inversa, de onde segue-se

$$u(t) = u_0E_\mu(-w^2t^\mu),$$

onde $E_\mu(x)$ é a função de Mittag-Leffler dada por

$$E_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\mu k + 1)}.$$

Conclusão

Com a metodologia da função de Green, conduzimos o problema de uma equação diferencial ordinária e as condições de contorno, numa equação integral de Fredholm. Alterando as condições, isto é, agora, condições iniciais, conduzimos o problema a uma equação integral de Volterra.

Utilizando a metodologia da transformada de Laplace, discutimos a equação do movimento associado ao problema do oscilador harmônico fracionário em termos da função de Mittag-Leffler.

Referências

[1] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).

[2] B. N. Narahari Achar, J. W. Hanneken, T. Enck and T. Clarke, *Dynamics of the Fractional Oscillator*, Physica A, **297**, 361-367, (2001).

[3] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira e Ary O. Chiacchio, *Sobre a Função de Mittag-Leffler*, Relatório de Pesquisa 15/06, Imecc-Unicamp, (2006).

[4] Ana L. Soubhia, *Equações Diferenciais do Tipo Elíptico e a Função de Green*, PIBIC-CNPq, (2006-2007).